SA 2016 **Analyse III – Série 33** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 22 novembre 2016 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 121. Transformation de Cayley.

(a) Soit $\mathbb{D} = B_1(0) \subseteq \mathbb{C}$ le disque unité ouvert, et soit

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$

le demi-plan supérieur. Montrer que *la transformation de Cayley* $T : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$,

$$w = T(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

est une application biholomorphe de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{D}$.

(b) Quelles sont les images des points $0, \pm 1, \pm i$ et ∞ par l'application $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$? Sur quoi sont appliquées les droites passant par l'origine ? Sur quoi sont appliqués les cercles de centre 0 ? Et les droites $x = \text{const}$ et $y = \text{const}$?

Indication. Employer le fait que T est conforme et applique les droites et les cercles sur des droites ou des cercles d'après l'exercice 20 ([K1] p. 40).

Exercice 122. Automorphismes du demi-plan. Pour un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$, on désigne par $\mathrm{Aut}(U)$ le groupe des *automorphismes holomorphes* de U, c'est-à-dire des applications biholomorphes $U \to U$. Montrer :

(a) Avec la transformation de Cayley T (exercice 121),

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = T^{-1} \mathrm{Aut}(\mathbb{D})\, T\,.$$

(b) $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est l'ensemble des applications de la forme

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$.

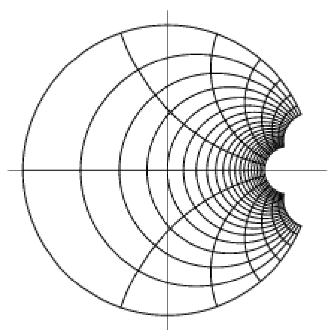
(c) Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ est isomorphe au groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) := \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\pm I$, où $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ est le groupe des matrices réelles 2×2 avec déterminant 1.

(d) Montrer que l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ sur $\mathbb{H}$ est *transitive*, c'est-à-dire pour des points $z_1, w_1 \in \mathbb{H}$ quelconques il existe $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ tel que $f(z_1) = w_1$. Est-ce que l'élément f est unique ?

Exercice 123. Séries de Laurent. Determiner le domaine de convergence des séries de Laurent suivantes :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{e^{\alpha n} + e^{-\alpha n}} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n^2+2} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n (z+2)^{2^n}$$



Indications

122 **(b)** Utiliser **(a)**. Vous connaissez déjà $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ (voir Königsberger 2, p. 224).

(c) Trouver un homomorphisme surjectif de groupes $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.