SA 2016 **Analyse III – Série 32** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 15 novembre 2016 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 118. Facteur intégrant. Une fonction continue h est dite un *facteur intégrant* (ou *multiplicateur d'Euler*) pour la forme ω de degré 1 sur $U \subseteq \mathbb{R}^n$ si $h(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$ et la forme $h\omega$ est exacte, c'est-à-dire s'il existe une fonction différentiable f avec

$$df = h\omega.$$

(a) Trouver un facteur intégrant h sur $\mathbb{R}^2$ et une primitive correspondante f pour la forme de degré 1

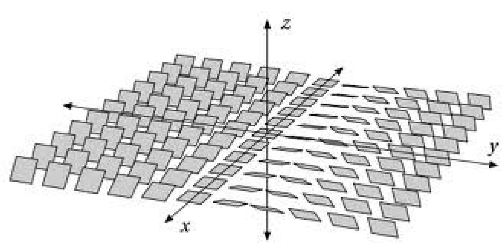
$$\omega = (2x^2 + 2xy^2 + 1)y\,dx + (3y^2 + x)\,dy$$

Indication : essayer l'ansatz $h(x, y) = m(x)$.

(b) Montrer que la forme

$$\omega = dz - y\,dx$$

sur $\mathbb{R}^3$ n'admet pas de facteur intégrant sur aucun sous-ensemble ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^3$.



Exercice 119. Nombres de Bernoulli.

(a) Considérons la fonction holomorphe $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ avec $f(0) = 1$. Pour déterminer son développement en série entière autour de $z_0 = 0$, on fait l'ansatz

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n.$$

Montrer que les *nombres de Bernoulli* B_n qui apparaissent ici satisfont la formule de récursion

$$\binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \ldots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} = 0$$

pour $n \geq 2$. Calculer $B_0, \ldots, B_8$. Quel est le rayon de convergence de la série ?

(b) Procéder de manière analogue pour le développement en série entière de

$$g(z) = \frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

Quelle est la formule de récursion correspondante pour les E_k, appelés *nombres d'Euler* ? Quel est le rayon de convergence de la série ? Calculer $E_0, \ldots, E_8$.

Exercice 120. Lignes polygonales et homotopie. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert. Une *ligne polygonale* dans U est une courbe continue $\sigma : [a,b] \to U$ avec la propriété suivante: il existe une partition $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ telle que la restriction $\sigma_k := \sigma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ est de la forme

$$\sigma_k(t) = x_{k-1} + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}(x_k - x_{k-1}) \qquad t_{k-1} \leq t \leq t_k.$$

La ligne polygonale est dite *inscrite* à la courbe continue $\gamma : [a,b] \to U$ si $\sigma(t_k) = \gamma(t_k)$ pour $k = 0, \ldots, n$. Montrer :

(a) Toute courbe continue $\gamma : [a,b] \to U$ peut être approchée uniformément par des lignes polygonales dans U : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une ligne polygonale $\sigma : [a,b] \to U$ inscrite à la courbe γ avec

$$||\gamma - \sigma||_\infty := \max_{t \in [a,b]} ||\gamma(t) - \sigma(t)|| \leq \varepsilon.$$

(b) Soit $\gamma : [a,b] \to U$ une courbe continue dans U. Alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que toute courbe continue $\sigma : [a,b] \to U$ avec les mêmes extrémités que γ et avec $||\gamma - \sigma||_\infty \leq \varepsilon$ est homotope à γ dans U.

Indications

118 **(b)** Supposer que h et f existent sur un ouvert U. Que peut-on dire sur les dérivées partielles de f ? Considérer comment f change le long des courbes fermées convenables dans U afin d'arriver à une contradiction.

120 **(a)** Utiliser le fait que γ est *uniformément* continue.