SA 2016 **Analyse III – Série 31** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 8 novembre 2016 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 114. Primitives. Déterminer des primitives pour les formes de degré 1 suivantes sur des sous-ensembles appropriés de $\mathbb{R}^2$ resp. $\mathbb{R}^3$.

$$\omega = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \frac{e^y}{1+x^2}\,dy \qquad \eta = \frac{2}{z}\,dx - \frac{3}{z}\,dy + \frac{3y-2x}{z^2}\,dz$$

Exercice 115.$^\clubsuit$ **Oscillateur.** On considère un oscillateur forcé non amorti décrit par l'équation différentielle

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \alpha \sin(\omega t)$$

où ω_0, α et ω sont des constantes réelles positives. Supposons que $\omega \neq \omega_0$.

(a) Trouver une solution particulière x_p en utilisant l'ansatz $x_p(t) = C\sin(\omega t)$.

(b) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle.

(c) Pour x_0 et v_0 donnés, déterminer la solution qui remplit les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$.

(d) Etudier la solution générale en fonction de la fréquence ω. Utiliser Mathematica, Maple ou Matlab. Quel est l'effet de l'impulsion lorsque ω est tres grand ? Quel est l'effet lorsque ω est proche de ω_0 ?

Exercice 116. Solutions particulières. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ les racines du polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0,$$

c'est-à-dire

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n).$$

(a) Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Considérons l'équation différentielle linéaire inhomogène (avec $D = d/dt$)

$$P(D)x = b\,.$$

Montrer qu'une solution est donnée par $x(t) = x_n(t)$, où la fonction x_n est obtenue en résolvant successivement le système suivant d'équations différentielles du premier ordre pour $x_1, x_2, x_3, \ldots$:

$$\begin{aligned}
(D - \lambda_1)x_1 &= b \\
(D - \lambda_2)x_2 &= x_1 \\
&\vdots \\
(D - \lambda_n)x_n &= x_{n-1}
\end{aligned}$$

(b) Utiliser cette méthode pour trouver des solutions particulières pour les équations différentielles suivantes. Vérifier vos resultats.

$$\textbf{(i)} \qquad D^2x - 3Dx + 2x = e^t$$
$$\textbf{(ii)} \qquad D^2x + 5Dx + 4x = 3 - 2t$$
$$\textbf{(iii)} \qquad (D^3 - 5D^2 + 8D - 4)x = e^{2t}$$

Exercice 117. Variation des constantes. Considérons une équation différentielle linéaire inhomogène
$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0x = b$$
pour une fonction $x : I \to \mathbb{K}$, avec des fonctions $a_j, b : I \to \mathbb{K}$ continues. Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ un système fondamental des solutions de l'équation homogène. Afin de trouver une solution particulière de l'équation homogène, on fait l'ansatz

$$\psi(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_n(t)\varphi_n(t)$$

où les fonctions coefficients $c_1, \ldots, c_n$ satisfont le système

$$\begin{aligned} \dot{c}_1\varphi_1 + \ldots + \dot{c}_n\varphi_n &= 0 \\ \dot{c}_1\dot{\varphi}_1 + \ldots + \dot{c}_n\dot{\varphi}_n &= 0 \\ \dot{c}_1\ddot{\varphi}_1 + \ldots + \dot{c}_n\ddot{\varphi}_n &= 0 \\ &\vdots \\ \dot{c}_1\varphi_1^{(n-1)} + \ldots + \dot{c}_n\varphi_n^{(n-1)} &= b \end{aligned}$$

Les coefficients sont alors obtenus en résolvant ce système pour $\dot{c}_1, \ldots, \dot{c}_n$ et en intégrant.

(a) Expliquer pourquoi cette méthode de la variation des constantes fonctionne.

(b) Employer la méthode pour trouver la solution réelle générale des équations différentielles suivantes:

$$\textbf{(i)} \qquad D^2x - Dx - 2x = 4t^2$$
$$\textbf{(ii)} \qquad \ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 16\cos 4t$$
$$\textbf{(iii)} \qquad \ddot{x} + \frac{\dot{x}}{t} - \frac{x}{t^2} = \ln t \quad (t > 0)$$

Pour (iii), noter que $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = 1/t$ est un système fondamental de l'équation homogène.

Indication

116 (b) Solution de $\dot{x}(t) = a\,x(t) + b(t)$ (voir Königsberger 2, p.154) :

$$x(t) = c\,e^{at} + e^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-as}b(s)\,ds$$