SA 2016 **Analyse III – Série 30** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 25 octobre 2016 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 111. Lotka–Volterra. On considère le système d'équations différentielles de *Lotka–Volterra* pour des fonctions réelles non-négatives $x, y : \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$$\dot{x} = x(\alpha - \beta y)$$
$$\dot{y} = y(-\gamma + \delta x)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes réelles positives. Résoudre le système en l'écrivant après élimination de dt sous la forme

$$\frac{dx}{x(\alpha - \beta y)} = \frac{dy}{y(-\gamma + \delta x)}$$

puis en séparant les variables et intégrant. On obtient les solutions sous forme implicite $f(x, y) = c$. Pourquoi cette procédure formelle est-elle justifiée? Esquissez le portrait de phase dans le quadrant $[0, \infty) \times [0, \infty)$. Quelles sont les valeurs maximales de x et y pour des valeurs de départ données x_0, y_0 ?

Exercice 112. Application exponentielle. On considère l'application exponentielle $\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$,

$$\exp(X) = e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k = I + X + \frac{1}{2} X^2 + \dots$$

(a) Trouver des matrices $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ avec $e^{X+Y} \neq e^X e^Y$.

(b) Montrer : Si $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ commutent, i.e. si $XY = YX$, alors $e^{X+Y} = e^X e^Y$.

(c) Montrer que $\det(e^X) = e^{\mathrm{trace}(X)}$ pour tout $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(d) Déduire de **(b)** que $\exp : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ n'est *pas* surjective, où

$$\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det A > 0\}.$$

Exercice 113. Equations différentielles linéaires. Considérons les équations différentielles suivantes pour des fonctions $t \mapsto x(t)$, oú $D^k = \frac{d^k}{dt^k}$. Déterminer un système fondamental de solutions réelles.

(a) $D^4x - D^3x - 9D^2x - 11Dx - 4x = 0$

(b) $(D^2 - 2D + 5)^2 x = 0$

(c) $D^4x + D^3x + 2D^2x - Dx + 3x = 0$

(d) $(D^5 + D^4 + D^3 + D^2 + D + 1)x = 0$

Indications

112 **(b)** Considérer les fonctions $U(t) = e^{t(X+Y)}$ et $V(t) = e^{tX}e^{tY}$. Calculer $\dot{U}(t)$ et $\dot{V}(t)$. Noter que U et V résolvent le même problème à valeur initiale. Conclure que $U = V$, donc que $U(1) = V(1)$.

(c) Si X est une matrice triangulaire, verifier l'égalité par un calcul direct. Pour le cas général, rappelons qu'il existe une matrice T telle que $Y = T^{-1}XT$ est une matrice triangulaire (complexe ...). Noter que

$$\exp(T^{-1}XT) = T^{-1}\exp(X)\,T\,.$$

Alternativement, soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$. Montrer que l'égalité est satisfaite pour tout $X \in \mathcal{D}$. Prouver que $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble *dense* dans $\mathbb{R}^{n\times n}$, c'est-à-dire que l'adhérence $\overline{X} = \mathbb{R}^{n\times n}$. Conclure que l'égalité est satisfaite pour tout $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(d) Selon **(b)** on a $\exp(X) = (\exp(\frac{1}{2}X))^2$. Trouvez une matrice $A \in \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ qui ne peut pas s'écrire sous la forme $A = B^2$.

113 **(a)** $\lambda_1 = -1$ est une racine multiple du polynôme caractéristique.

(c) $\lambda_1 = -1 + i\sqrt{2}$ est une racine.

(d) Utiliser la somme géométrique.