SA 2016 **Analyse III – Série 29** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 18 octobre 2016 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

---

Exercice 108. Gronwall. Soit $||\cdot||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ est dite une ε–*solution* (ou solution approchée à ε près) de l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)),$$

si elle vérifie l'inégalité

$$||\dot{\varphi}(t) - F(t, \varphi(t))|| \leq \varepsilon$$

pour tout $t \in I$. (Par conséquent, une 0-*solution* est une solution.) Soit $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue satisfaisant la condition de Lipschitz

$$||F(t,x) - F(t,y)|| \leq L||x - y|| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ t \in I.$$

Montrer: Si φ est une ε_1–solution, ψ une ε_2–solution de l'équation différentielle, alors pour tout $t_0, t \in I$,

$$\boxed{||\varphi(t) - \psi(t)|| \leq \Big((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,|t - t_0| + ||\varphi(t_0) - \psi(t_0)||\Big) e^{L|t-t_0|}}$$

Exercice 109. Equations différentielles linéaires.

(a) Trouver un système fondamental *réel* pour le système d'équations différentielles

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(b) Dessiner le portrait de phase du système (1).

(c) Calculer $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k A^k / k!$ pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

(d) Résoudre le problème à valeur initiale suivant en employant la méthode de variation des constantes :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4e^t \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 110. Champs de vecteurs et portraits de phase.

(a) On considère le champs de vecteurs $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donné par

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + \alpha(1-r)\,x \\ -x + \alpha(1-r)\,y \end{pmatrix}$$

avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$, et avec une constante $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer les courbes intégrales (= trajectoires), c'est-à-dire les solutions du système d'équations différentielles

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = v(x(t), y(t)) \ .$$

Pour $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$, dessiner le portrait de phase dans le plan x, y. Pour le faire, utiliser l'ansatz

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos\varphi(t) \\ y(t) &= r(t) \sin\varphi(t) \end{aligned}$$

en coordonnées polaires et montrer que le système équivaut à

$$\dot{r} = \alpha(1-r)r \qquad \dot{\varphi} = -1.$$

Dessiner aussi le graphe de la fonction $t \mapsto r(t)$.

(b) Calculer les courbes intégrales et dessiner le portrait de phase du champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donné par

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + (1-r)(2-r)\,x \\ -x + (1-r)(2-r)\,y \end{pmatrix} .$$

(c) ♣ Dessiner et discuter le portrait de phase du champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donné par

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} y + r\sin(\frac{1}{r})\,x \\ -x + r\sin(\frac{1}{r})\,y \end{pmatrix}$$

pour $(x,y) \neq 0$, avec $v(0,0) = 0$.

.

Indications

108 Appliquer le lemme de Gronwall à la fonction $g(t) = ||\varphi(t) - \psi(t)||$.

109 **(b)** Regarder Königsberger 2, p. 152-153.

(c) Utiliser **(a)** et le fait que $\Phi(t) = e^{tA}$ est la matrice fondamentale du système (1) avec condition initiale $\Phi(0) = I$.