SA 2016 **Analyse III – Série 28** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 11 octobre 2016 13:15 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 105. Applications conformes. Soit X un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, et soit $U \subseteq X$ un ouvert. Une application différentiable $f : U \to X$ est dite *conforme*, si pour tout $x \in U$ sa dérivée $Df(x) : X \to X$ est conforme dans le sens de l'exercice 104, ainsi

$$Df(x)^T Df(x) = \mu(x)\, I$$

avec $\mu(x) > 0$. On considère $X = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$, et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application

$$f(z) = z^k$$

pour $z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée $Df(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et la matrice jacobienne $Jf(x) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Montrer que f est conforme sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

(b) Soit $\sigma : \mathbb{R}^n \backslash \{a\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{a\}$ la réflexion par rapport à la sphère $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - a|| = r\}$, définie par

$$\sigma(x) = a + \frac{r^2}{||x - a||^2}\,(x - a).$$

Calculer la dérivée $D\sigma(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et la matrice jacobienne $J\sigma(x)$. Montrer que σ est conforme.

Exercice 106. Equations différentielles. Calculer toutes les solutions $x : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$ des équations différentielles

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$$

suivantes. Déterminer l'intervalle maximal de définition et esquisser les solutions dans le plan t, x.

(a) $t\dot{x} + 2x = 0$

(b) $x\dot{x} + (1 + x^2)\sin(t) = 0$

(c) $t\dot{x} - 2x - t = 0$

(d) $t\dot{x} - 2x - t + 4 = 0$

Exercice 107. Equation intégrale de Fredholm. Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que pour un intervalle de longuer $|b-a|$ suffisamment petite, ou pour un paramètre λ assez petit, il existe exactement une solution $u \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ de l'*équation intégrale de Fredholm*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\, u(y)\, dy \qquad \forall x \in [a,b].$$

Il suffit d'avoir la condition

$$\lambda\, |b-a| \cdot \max_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)| < 1.$$

(b) Définissons $K_1(x,z) = K(x,z)$ et, pour $n = 2, 3, \ldots$

$$K_n(x,z) = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K(x,y_1)K(y_1,y_2)\ldots K(y_{n-1},z)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}\,.$$

Montrer que u est la limite de la *série de Liouville-Neumann*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n w_n(x)$$

avec $w_0 = f$ et, pour $n = 1, 2, \ldots$

$$w_n(x) = \int_a^b K_n(x,z)\, f(z)\, dz\,.$$

Indications

106 Séparation des variables. Dans **(c)**, substituer $u(t) := x(t)/t$.

107 **(a)** C'est un problème de point fixe $u = \Phi(u)$ dans l'espace de Banach $C^0([a,b],\mathbb{R})$, avec la norme

$$||u||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |u(x)|\,.$$

Appliquer le théorème du point fixe de Banach (Königsberger 2, p.107).

(b) Selon la preuve du théorème du point fixe, u est la limite de la suite

$$u_n = \Phi^n(f)\,.$$

Écrire $\Phi(f), \Phi^2(f), \Phi^3(f)$ explicitement pour voir ce qui se passe.