SA 2016 **Analyse III – Série 27** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 4 octobre 2016 12:00 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 97. Inversion de matrices avec Newton. Soit $U = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ l'ensemble des matrices inversibles. Pour calculer l'inverse A^{-1} de $A \in U$, on pourrait appliquer la méthode de Newton à la fonction $f : U \to \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par $f(X) = X^{-1} - A$.

(a) Montrer que l'itération prend la forme

$$X_{k+1} = X_k + X_k(I - AX_k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(b) Pour l'erreur $E_k := I - AX_k$ on a $E_{k+1} = (E_k)^2$.

(c) Soit $||\cdot||$ une norme sous-multiplicative sur $\mathbb{R}^{n\times n}$, c'est-à-dire $||AB|| \leq ||A||\,||B||$. Si $||I - AX_0|| < 1$, alors la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ converge vers A^{-1}.

Exercice 103. Inversion globale. Soit X un espace normé de dimension finie (par exemple $X = \mathbb{R}^n$), $U \subseteq X$ un sous-ensemble ouvert *convexe*, et soit $f : U \to X$ continûment différentiable. On suppose que la dérivée $Df(a)$ est partout proche de l'identité dans le sens que, pour une norme compatible $||\cdot||$ sur $\mathcal{L}(X, X)$, on a

$$||Df(a) - \mathrm{id}_X|| < 1 \qquad \forall\, a \in U.$$

Montrer :

(a) Pour tout $a \in U$, la dérivée $Df(a) : X \to X$ est injective, donc bijective.

(b) f est injective.

(c) Conclure à l'aide du théorème d'inversion locale : $f(U)$ est un sous-ensemble ouvert de X, et la restriction $f|_U : U \to f(U)$ est un difféomorphisme de classe C^1.

(d) Généraliser aux applications f avec $Df(a)$ "proche d'une matrice constante" $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Exercice 104. Algèbre linéaire - similitudes. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Une application linéaire $L : V \to V$ est dite *conforme* ou *similitude vectorielle*, si L est injective et pour tout $v, w \in V\setminus\{0\}$, l'angle entre v et w est le même que l'angle entre Lv et Lw, plus précisement :

$$\cos\angle(Lv, Lw) = \frac{\langle Lv, Lw\rangle}{||Lv||\,||Lw||} = \frac{\langle v, w\rangle}{||v||\,||w||} = \cos\angle(v, w)$$

Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

(a) L est conforme.

(b) L applique des vecteurs orthogonaux sur des vecteurs orthogonaux.

(c) Il existe une application orthogonale $Q : V \to V$ et un nombre $\varrho \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ avec

$$L = \varrho\, Q.$$

(d) Il existe un nombre réel $\mu > 0$ avec $L^T L = \mu\, I$.

Ici L^T désigne l'application *adjointe* de L, characterisée par $\langle L^T v, w\rangle = \langle v, Lw\rangle$ pour tout $v, w \in V$, et I est l'application identité de V.

Indications

97 Newton : $X_{k+1} = X_k - Df(X_k)^{-1} f(X_k)$. Qu'est-ce que $Df(X_k)$?

103 **(b)** $f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t(y-x))\, dt = \int_0^1 Df(x + t(y-x))\,(y-x)\, dt$

$Df(a) = (Df(a) - \mathrm{id}_X) + \mathrm{id}_X$.