SA 2016 **Analyse III – Série 26** P. Ghanaat

à remettre jusqu'au mardi 27 septembre 2016 12:00 heures
dans le casier entre les bureaux 2.55 et 2.56 du bâtiment de physique

Exercice 99. Système d'équations. On considère le système d'équations

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1 x_2 + e^{y_2} &= 0 \\ 2x_1 + y_1^2 - y_1 y_2 &= 5 \end{aligned}$$

(a) Montrer qu'il existe un voisinage $U \subseteq \mathbb{R}^2$ du point $(2,5)$ tel que pour tout $(x_1, x_2) \in U$ le système possède une solution $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ avec la propriété suivante :

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, x_2) \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

où φ_1, φ_2 sont des fonctions C^1 avec $\varphi_1(2,5) = -1$ et $\varphi_2(2,5) = 0$.

(b) Calculer la matrice jacobienne de l'application $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ au point $(2,5)$.

Exercice 101. Isométries euclidiennes. On considère un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$, muni de la métrique euclidienne

$$d(x,y) = ||x-y||_2 = \sqrt{(x-y)^T(x-y)}\,.$$

Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application qui est différentiable et *isométrique*, c'est-à-dire

$$d(f(x), f(y)) = d(x,y)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$. Soit $f'(x) = Jf(x)$ la matrice jacobienne de f. Montrer :

(a) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a $f'(x)^T(f(y) - f(x)) = y - x$.

(b) $f'(x)^T f'(y) = I$, en particulier $f'(x)$ est une matrice orthogonale.

(c) L'application $x \mapsto f'(x)$ est constante.

(d) En déduire : f est un *mouvement euclidien*, i.e. il existe une matrice orthogonale A et un élement $b \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$f(x) = Ax + b$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 102. Séries de Taylor de fonctions implicites.

(a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ avec $f(0,0) = 0$. On veut résoudre l'équation $f(x,y) = 0$ par rapport à y, proche du point $(0,0)$, en trouvant une fonction g de classe C^∞ telle que

$$f(x, g(x)) = 0 \qquad (*)$$

avec $g(0) = 0$. Calculer les cinq premiers coefficients $g^{(k)}(0)/k!$ $(k = 0, \ldots, 4)$ de la série de Taylor de g autour de 0, en dérivant l'équation $(*)$. Pourquoi faut-il la condition $f_y(0,0) = (\partial f/\partial y)(0,0) \neq 0$? Exemple :

$$g'(0) = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)}$$

(b) Généraliser la procédure de la partie **(a)** pour le système d'équations

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

que l'on veut résoudre proche de $0 = (0, \ldots, 0)$ sous la forme

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ y_2 &= g_2(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= g_m(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Comment obtient-on les coefficients de Taylor des fonctions g_j en 0 ? Pourquoi faut-il que la matrice $\partial_j f_k(0)$, $j = n+1, \ldots, n+m$, $k = 1, \ldots, m$ soit inversible ?

Indications

99 Théorème des fonctions implicites.

101 On a $\big(f(x)-f(y)\big)^T \big(f(x)-f(y)\big) = (x-y)^T(x-y)$. Dériver cette équation par rapport à x, puis à y.