Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉAIRE I

SÉRIE 9

À rendre avant le jeudi 27 novembre, 14h

Exercice 1

Soit $a := (2, -1, 1)^T$ et $b := (-1, 0, 1)^T$ et soit V_a, resp. V_b deux plans dans $\mathbb{R}^3$, perpendiculaires à a, resp. b. Trouvez $V_a \cap V_b$. Quel est le rapport entre $V_a \cap V_b$ et $\operatorname{span}(a, b)$? Justifiez votre réponse.

Exercice 2

Soit $V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \,\middle|\, b = c \right\} \subset M(2 \times 2, \mathbb{R})$ le sous-espace des matrices symétriques et soit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrez que $\mathcal{A} := (v_1, v_2, v_3)$ est une base de V.

Soit $E_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $\Psi_{\mathcal{A}}$ l'isomorphisme

$$\Psi_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^3 \to V, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3.$$

Calculez $\Psi_{\mathcal{A}}^{-1}(E_2)$ (c.-à-d. exprimez E_2 par une combinaison linéaire des v_i).

Exercice 3

Soit $\mathcal{A} := \{(0, 1)^T, (1, 1)^T\}$ et $\mathcal{B} := \{(1, 1)^T, (1, -1)^T\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. Calculez la matrice de l'application

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2)^T \mapsto (x_2, x_1)^T.$$

par rapport aux bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Exercice 4

Soit $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$, soit $b \in \mathbb{K}^m$ et soit $B := (A, b) \in M(m \times (n+1), \mathbb{K})$. Soit $\Phi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ et $\Phi_B : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^m$ les homomorphismes correspondants. Considérez le système d'équations linéaires $A \cdot x = b$. Montrez que

a) $\operatorname{Sol}(A, b) \neq \emptyset$ si et seulement si $\dim(\operatorname{im} \Phi_A) = \dim(\operatorname{im} \Phi_B)$.

b) $Ax = b$ a une solution unique si et seulement si $\dim(\operatorname{im} \Phi_A) = \dim(\operatorname{im} \Phi_B) = n$.

Exercice 5
Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.