UNI
FR
UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉAIRE I

SÉRIE 5

À rendre avant le jeudi 23 octobre, 14h

Pour $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ soit $v^T = (v_1, \cdots, v_n)$. Pour $v = (v_1, \cdots, v_n)$, $v^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. On dit que v^T est la transposée de v.

Exercice 1

L'application ϕ, est-elle linéaire ? Justifiez votre réponse.

a) $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, définie par $\phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - z \\ z - y \end{pmatrix}$

b) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |y| \\ |x| \end{pmatrix}$

c) $\phi = \det : \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, telle que $\phi : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \det A = a \cdot d - b \cdot c$

Soit $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On regarde V comme un espace vectoriel défini sur le corps K.

d) $\phi : V \to \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$, telle que $\phi : f \mapsto \begin{pmatrix} f(0) - \overline{f(1)} \\ f(1) + 2\overline{f(0)} \end{pmatrix}$

e) ϕ comme au point d), mais avec $K = \mathbb{C}$

Exercice 2 a) Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - \frac{y}{5} \\ \frac{y}{4} + \frac{z}{3} \\ \frac{z}{7} - \frac{x}{3} \end{pmatrix}.$$

Montrez que ϕ est linéaire. Est-ce que ϕ est injective/surjective/bijective ? Justifiez votre réponse.

b) Est-ce qu'il existe une application linéaire $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\phi((1,2)^T) = (1,-1)^T$, $\phi((3,15)^T) = (40,-7)^T$ et $\phi((11,7)^T) = (0,-42)^T$?

Exercice 3 a) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ les vecteurs $u = (6, 9, 3)^T$ et $v = (3\alpha, 2\alpha, 1)^T$ sont-ils linéairement indépendants ?

b) Pour quels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ le vecteur $w = (2, \alpha, \beta, -2)^T$ appartient-il à $W = \text{span}(u, v)$, où $u = (1, 1, 4, 2)^T$ et $v = (1, -1, -6, 7)^T$?

Exercice 4
Est-ce que les vecteurs donnés u et v sont linéairement indépendants dans W, si

a) $W = \mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et $u = \sqrt{3}$, $v = 1/\sqrt{12}$

b) $W = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^6$ et $u = (2, 3, 0, 2, 2, 4)$, $v = (1, 5, 0, 1, 1, 2)$

c) $W = \text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u = \{x \mapsto x^2\}$, $v = \{x \mapsto 3 \cdot x\}$

d) $W = \text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u = \{x \mapsto \cos x\}$, $v = \{x \mapsto \sin x\}$

Exercice 5
Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.