Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉAIRE I

SÉRIE 4

À rendre avant le jeudi 16 octobre, 14h

Exercice 1

Calculez des nombres complexes :

a) $(1-i)/(1+i)$ *b)* $(3i)^{-3}$ *c)* $|3-5i|$ et

d) z^{-1} où $z = (2, \pi/3)$ en coordonnées polaires.

Exercice 2 a) Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrez que

(i) $0 \cdot v = 0_V$ pour tout $v \in V$, (ici, $0_V \in V$ dénote l'élément zéro dans l'espace V)

(ii) $(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$ pour tout $v \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

b) Décidez, quels ensembles W ci-dessous sont des sous-espaces vectoriels de V :

(i) $V = \mathbb{R}^2, \quad W := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in V \quad | \quad 4v_1 + 3v_2 = v_1^2 + v_2^2 \right\}$

(ii) $V = \mathbb{R}^3, \quad W := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in V \quad | \quad 4v_1 + 3v_2 = 0 \right\}$

(iii) $V = Map(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad W := \{ f \in V \quad | \quad f(x+2) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \}$

Exercice 3

Soient

$$K := \mathbb{Q}(\sqrt{-7}) := \left\{ a + i \cdot b\sqrt{7} \quad | \quad a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{C} \quad \text{et} \quad O := \left\{ a + i \cdot b\sqrt{7} \quad | \quad a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subset K.$$

Montrez que

a) K est un sous-corps (ein Unterkörper) de $\mathbb{C}$,

b) O est un sous-anneau (ein Unterring) de K.

Exercice 4

Soit p un nombre premier et soit $\mathbb{K}$ un corps. Supposons que $p \cdot x = 0 \ \forall x \in \mathbb{K}$. Montrez que $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, [a] \mapsto [a]^p$, est un homomorphisme de corps, c.-à-d. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, $\forall x, y \in K$ et $\varphi(1) = 1$.

Exercice 5
Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.