

SÉRIE 3

À rendre avant le jeudi 9 octobre, 14h

Exercice 1

Déterminez pour chaque exemple si (G, \star) est un groupe et justifiez votre réponse :

$$G = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, q \text{ impair} \right\} \text{ avec } a \star b := a + b,$$

$$G = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0, q \neq 0, q \text{ impair} \right\} \text{ avec } a \star b := a \cdot b.$$

Déterminez pour chaque exemple si l'application f est un homomorphisme de groupes et justifiez votre réponse :

$$f : (\mathbb{Q}_{>0}, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Q}_{>0}, \cdot), \quad a \mapsto a^{-1}, \quad f : (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +), \quad a \mapsto a^3.$$

Exercice 2

Soit $\varphi : G \rightarrow H$ un homomorphisme de groupes.

- Montrez que le noyau $\ker \varphi := \{g \in G \mid \varphi(g) = e\}$ est un sous-groupe de G .
- Montrez que si φ est un isomorphisme de groupes, alors son inverse $\varphi^{-1} : H \rightarrow G$, $\varphi(g) \mapsto g$, est aussi un isomorphisme de groupes.

Exercice 3 a) Déterminez le groupe des unités de l'anneau $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

- Déterminez l'inverse a^{-1} de $a = [2]$, $[3]$ et $[4]$ dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
- Soit R un anneau intègre et $a \in R$, $a \neq 0$. Montrez que:
 $a \cdot x = a \cdot \tilde{x}$ implique $x = \tilde{x}$ pour tout $x, \tilde{x} \in R$.
- Soit K un corps. Montrez que pour tout $a, b \in K$ on a
 $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$, $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -a \cdot b$, $a \cdot b = (-a) \cdot (-b)$.

Exercice 4 a) Construisez un corps avec exactement 4 éléments. Décrivez l'addition et la multiplication avec des tables.

- Montrez que deux corps avec exactement 4 éléments sont isomorphes.
- Soit $R := \left\{ \frac{a}{5^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Montrez que R est un sous-anneau de \mathbb{Q} , mais pas un corps.

Exercice 5

Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.