UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

**Cours du Prof. Dr. Anand Dessai** ALGÈBRE LINÉAIRE I

SÉRIE 11 **(corrigée)**

*À rendre avant le jeudi 11 decembre, 14h*

---

### Le test écrit aura lieu le lundi 15 décembre dans la séance d'exercices

---

**Exercice 1**

a) Soient $\mathcal{A} = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ et $\mathcal{B} = \{(i,1)^T, (1,i)^T\}$ deux bases de $\mathbb{C}^2$ (comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel). Déterminez les matrices $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ et $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$.

**b**) Soit $f_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'automorphisme linéaire de $\mathbb{C}^2$, défini par

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1\cos\theta + z_2\sin\theta \\ -z_1\sin\theta + z_2\cos\theta \end{pmatrix}, \text{ avec } \theta \in [0, 2\pi].$$

Calculez $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f_\theta)$ par rapport à la base $\mathcal{A} = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$. Trouvez une base $\mathcal{B}$ telle que $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

**Exercice 2**

On definit *la trace* $\operatorname{tr} A$ d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K})$ comme la somme de tous ses éléments diagonaux, i.e.

$$\operatorname{tr} : \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad A \mapsto a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

a) Démontrez que $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^T$ et $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ pour tout $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K})$. Démontrez que $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} \tilde{A}$ si $A$ et $\tilde{A} \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K})$ sont deux matrices semblables. Rappel : $\tilde{A}$ et $A$ sont semblables s'il existe une matrice $S \in Gl_n(\mathbb{K})$ t.q. $\tilde{A} = S \cdot A \cdot S^{-1}$.

Soit $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, triangulaire supérieure, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sur la diagonale.

b) Démontrez que $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$ où $e^A := E_n + A + A^2/2! + A^3/3! + \ldots$. Démontrez que $\det e^{\tilde{A}} = e^{\operatorname{tr} \tilde{A}}$ si $\tilde{A}$ et $A$ sont semblables.

**Exercice 3**
Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.