UNI
FR

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Cours du Prof. Dr. Anand Dessai ALGÈBRE LINÉAIRE I

SÉRIE 10

À rendre avant le jeudi 4 decembre, 14h

Le test écrit aura lieu le lundi 15 décembre dans la séance d'exercices

---

Exercice 1

a) Montrez que pour tout $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$, $B, B' \in M(r \times m, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a

$$(B + B') \cdot A = B \cdot A + B' \cdot A \qquad \text{et} \qquad \lambda(B \cdot A) = (\lambda B) \cdot A = B \cdot (\lambda A).$$

b) Calculez tous les produits possibles de deux matrices parmi les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad D = (3, 2, 1).$$

c) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda & 3 \\ 0 & -1 & -2\lambda \end{pmatrix} \in M(2 \times 3, \mathbb{C})$ une matrice avec un paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$. Calculez $A \cdot A^T$ et $A^T \cdot A$.

Exercice 2

a) Montrez que

$$\det \begin{pmatrix} b_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix} = b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{nn}.$$

b) Soit $\det(B) \neq 0$. Montrez que l'application $F : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto \frac{\det(A \cdot B)}{\det(B)}$, dépend de façon linéaire de chaque ligne.

c) Calculez le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice. Calculez A^2, A^3, A^4 et A^{127}.

Exercice 4

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5/3 & -4/3 \\ -4 & -2/3 & 7/3 \end{pmatrix}$ et soit $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto B \cdot x$.

a) Soit $v_1 = (0, 2, 1)^T$, $v_2 = (1, 0, 3)^T$. Calculez $\phi(v_1)$ et $\phi(v_2)$. Completéz les deux vecteurs en une base $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$, dans laquelle la matrice $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi)$ est égal à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Donc $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *est une dilatation de facteur 3 le long de la direction* v_3*, et de facteur 1 (pas de changement) dans le plan* $\operatorname{span}(v_1, v_2)$

b) Trouvez une autre base $\mathcal{A}' = (v_1', v_2', v_3')$ de $\mathbb{R}^3$ avec $v_3' = (-2, 2, -5)^T$, dans laquelle la matrice $M_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}'}(\phi)$ est aussi diagonale.

Exercice 5
Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.