Cours du Prof. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

Bonus SÉRIE 13

À rendre avant le jeudi 21 décembre, 16h

Exercice 1 Trouvez le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ des éléments suivants :

$$2\sqrt{3}, \quad \sqrt{2}+\sqrt{5}, \quad e^{\frac{2\pi i}{p}}.$$

Exercice 2 Soient $K \subset L$ une extension de corps et $\alpha, \beta \in L$. Montrez que α et β sont algébriques sur K si et seulement si $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques sur K.

Exercice 3 Soit $\varphi \in]0, 2\pi[$ une nombre réel tel que $e^{i\varphi}$ est transcendant. Montrez que $e^{i\varphi/3}$ n'est pas constructible à la règle et au compas à partir de $M = \{0, 1, e^{i\varphi}\}$.

Exercice 4 Soit $K \subset F$ une extension de corps et $\alpha \in F$ un élément algébrique. Soit $K[\alpha] \subset F$ l'anneau engendré par K et α et soit $K(\alpha) \subset F$ le corps engendré par K et α. On considère l'homomorphisme d'anneaux suivant :

$$\begin{aligned} \Phi : K[t] &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f(\alpha). \end{aligned}$$

1. L'application Φ est-elle injective ?
2. Montrez qu'il existe un polynôme unitaire $f \in K[t]$ tel que $K[t]/(f) \cong K[\alpha]$. (Ce polynôme f est appelé *polynôme minimal* de α sur K.)
3. Montrez que (f) est premier, donc maximal et donc que f est irréductible.
4. Montrez que $K[\alpha] = K(\alpha)$.