Cours du Prof. Anand Dessai — ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

SÉRIE 11

À rendre avant le jeudi 7 décembre, 16h

Exercice 1

1. Soient $S_1 := \{a \in \mathbb{Z} \mid 14 \nmid a\}$, $S_2 := \{a \in \mathbb{Z} \mid 7 \mid a\}$, $S_3 := \{1 + 3a - 22b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $S_4 := \mathbb{Z} - \{0\}$ et $S_5 := \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 1 \bmod 10\}$. Quels sous-ensembles $S_i \subset \mathbb{Z}$ sont de parties multiplicatives ?

2. Déterminez les éléments irréductibles dans $S_i^{-1}\mathbb{Z}$ si S_i est une partie multiplicative.

Exercice 2

1. Soit $M := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + 2y \equiv 0 \bmod 3\}$. Montrez que M est un $\mathbb{Z}$-module libre. Trouvez une base de M.

2. Soit M le sous-module de $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{R}$ engendré par $v_1 := \frac{2}{5}$, $v_2 := -\frac{3}{7}$. Est-ce que (v_1, v_2) est une base de M ?

3. Soit M le sous-module de $\mathbb{Q}$-module $\mathbb{R}$ engendré par $v_1 := 1$, $v_2 := \sqrt{5}$. Est-ce que (v_1, v_2) est une base de M ?

4. Montrez que le $\mathbb{Z}$-module $(\mathbb{Q}, +)$ n'est pas engendré sur $\mathbb{Z}$ par un nombre fini d'éléments de $\mathbb{Q}$.

Exercice 3 Soit R un anneau intègre. Soient E un R-module et

$$E_{\text{tor}} := \{x \in E \mid \exists\, r \in R, r \neq 0 \text{ avec } rx = 0\}.$$

Montrez les assertions suivantes :

1. E_{tor} est un sous-module de E.

2. Le R-module E/E_{tor} est *sans torsion.*

Exercice 4 Soit R un anneau intègre principal.

1. Soit F un R-module libre avec base $(x_1, \ldots, x_n)$. Soit $p \in R$ un élément premier. Montrez que F/pF est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} := R/(p)$ et les classes

$$\bar{x}_1 = x_1 + pF, \ldots, \bar{x}_n = x_n + pF$$

forment une base de F/pF.

2. Soit F un R-module libre. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_m)$ deux bases de F. Montrez que $n = m$.