UNI
FR

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Cours du Prof. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

SÉRIE 10
À rendre avant le jeudi 30 novembre, 16h

Ici, tous les anneaux sont commutatifs unitaires.

Exercice 1

(a) Montrez que le sous-anneau $R := \{p = \sum_i^n a_i x^i \in \mathbb{R}[x] \,|\, a_1 = 0\} \subset \mathbb{R}[x]$ n'est pas factoriel.
Indications : Considerez un polynôme du degré 2 qui est irréductible mais pas premier.

(b) Montrez que l'idéal engendré par 2 et x dans $\mathbb{Z}[x]$ n'est pas un idéal principal.

(c) Soient $I \subset \mathbb{Z}[x]$ un idéal et $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier tels que $p \in I$. Montrez que I est engendré par un ou deux éléments.

(d) On considère l'anneau $\mathbb{Q}[x, y]$. Est-il principal? Est-il euclidien? Est-il factoriel?

Exercice 2 Soit A un anneau, soit $S \subset A$ une partie multiplicative et soit $S^{-1}A$ l'ensemble des class d'équivalence $\{\frac{a}{s} \mid a \in A, s \in S\}$. Montrez :

1. La relation $(a, s) \sim (a', s') \iff \exists\, t \in S$ t.q. $t(as' - a's) = 0$ est une relation d'équivalence.
2. L'addition $S^{-1}A \times S^{-1}A \to S^{-1}A$, $\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} := \frac{as' + a's}{ss'}$, est bien définie.
3. La multiplication $S^{-1}A \times S^{-1}A \to S^{-1}A$, $\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} := \frac{aa'}{ss'}$, est bien définie.
4. $(S^{-1}A, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire.

Exercice 3 Quels polynômes sont irréductibles ?

a) $x^2y - xy^2 - x + y \in \mathbb{Q}[x, y]$.

b) $x^2 - y^2 + z^{18} \in \mathbb{Q}(x, y)[z]$.

Exercice 4 Soient R un anneau factoriel, $S \subset R$ une partie multiplicative et $Q(R)$ le corps des fractions de R.

De plus, soit $f(x) \in R[x]$ un polynôme irréductible du degré ≥ 1 et $f(x) = g(x)h(x)$ avec $g, h \in S^{-1}R[x]$. Montrez que si $g(x)$ est une unité dans $Q(R)[x]$, alors $g(x)$ est une unité dans $S^{-1}R[x]$.

Indications : Commencez par écrire $g(x) = \frac{a}{s}$ où $a \in R$ et $s \in S$; expliquez pourquoi ceci est possible. Le but est maintenant de montrer que $a \in S$.

1. *Utilisez un lemme du cours pour écrire $h(x) = \frac{b}{r}\tilde{h}(x)$, tel que $\tilde{h}(x) \in R[x]$ est primitif, $b \in R$ et $r \in S$.*
2. *Avec cela, développez l'égalité $f(x) = g(x)h(x)$ pour obtenir une égalité polynomiale dans $R[x]$.*
3. *On pose $\mathcal{Q} := \mathcal{P} - \mathcal{P}(S)$, où $\mathcal{P}$ est un ensemble de représentants des éléments premiers de R. Montrez alors que pour tout $q \in \mathcal{Q}$, q ne divise pas a.*
4. *En déduire que $a \in S$ et donc que $g(x)$ est inversible dans $S^{-1}R[x]$.*