Cours du Prof. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

SÉRIE 7

À rendre avant le jeudi 9 novembre, 16h

Ici, tous les anneaux sont commutatifs unitaires.

Exercice 1

1. Soient A un anneau et $I \subset A$ un idéal. Montrez les assertions suivantes :
   (a) $\operatorname{rad} I := \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \;\; a^n \in I\}$ est un idéal de A.
   (b) Si I est un idéal premier, alors $I = \operatorname{rad} I$.
2. Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit $\mathbb{K}[[x]] := \{\sum_{i\geq 0} a_i \cdot x^i \mid a_i \in \mathbb{K}\}$ des séries formelles sur $\mathbb{K}$ en une indéterminée x. Montrez que tous les idéaux non triviaux de $\mathbb{K}[[x]]$ sont de la forme (x^k) pour un $k \in \mathbb{N}$.
   (*Indication: Montrez d'abord qu'un élément* $\sum_{i\geq 0} a_i \cdot x^i$ *est inversible dans* $\mathbb{K}[[x]]$ *si et seulement si* $a_0 \neq 0$.)

Exercice 2 Soient $r, s \in A$ et $u \in A^*$.

(a) Montrez que u n'est pas un diviseur de 0.

(b) Montrez que si $d, d' \in A$ sont des pgcd de r et s, alors d et d' sont associés, i.e. $d \sim d'$.

(c) Montrez que si $v, v' \in A$ sont des ppcm de r et s, alors v et v' sont associés, i.e. $v \sim v'$.

(d) En conclure que si A est intègre, alors les pgcd (respectivement les ppcm) de deux éléments sont uniques à multiplication par une unité près.

Exercice 3

1. Soient $a, b \in A$. Montrez que si $I = (a) \cap (b)$ est un idéal principal de A tel que $I = (v)$, alors v est un plus petit commun multiple de a et b.
2. Décrivez les idéaux suivants de $\mathbb{Z}$ comme idéaux principaux :
   $I := (12) + (30)$ (I est l'idéal engendré par 12 et 30) et $J := I \cap (8)$.
3. Déterminez un plus petit commun multiple de
   $$p = x^2 - 1 \quad \text{et} \quad q = x^3 + 7x^2 + 11x + 5$$
   dans $\mathbb{Q}[x]$.

Exercice 4 (l'anneau des entiers de Gauss)
Soit l'ensemble $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ muni de l'addition et de la multiplication complexe. On considère l'application

$$\deg : \mathbb{Z}[i] - \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad a + ib \longmapsto a^2 + b^2.$$

Remarquez que $\deg(a + ib) = |a + ib|^2$ *i.e. le carré du module de* $a + ib$ *vu comme un nombre complexe.*

1. Montrez que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ et un anneau intègre.
2. Montrez que $a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ est une unité si et seulement si $\deg(a + ib) = 1$. Déterminez $\mathbb{Z}[i]^*$.
3. Montrez que $\mathbb{Z}[i]$ avec l'application deg est un anneau euclidien, i.e. pour $f, g \in \mathbb{Z}[i]$, $g \neq 0$, il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $f = qg + r$ et $\deg(r) < \deg(g)$ ou $r = 0$.
   (Indication : commencez par montrer qu'il existe $q = x + iy$ *dans* $\mathbb{Z}[i]$ *tel que* $|fg^{-1} - q| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$*. Faites un dessin pour visualiser la situation!)*
4. Calculez les plus grands communs diviseurs de $2 - 7i$ et $7 + 2i$ et de $11 - 7i$ et $18 + i$.