Cours du Prof. Anand Dessai Algèbre et géométrie I

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

Série 5

À rendre avant le jeudi 26 octobre, 16h

Exercice 1

On considère le groupe $(\mathbb{Z}, +)$. On sais que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $m\mathbb{Z}$ pour un nombre naturel $m \in \mathbb{N}$. Montrez que si le plus grand commun diviseur de r et s $\mathrm{pgdc}(r, s) = 1$, alors $\mathbb{Z}/rs\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$.

(*Indication: Utilisez l'identité de Bézout. Si* $\mathrm{pgdc}(r, s) = d$*, alors il existe deux nombres entiers* a *et* b *tels que* $a \cdot r + b \cdot s = d$.)

Exercice 2

1. Soit σ l'élément suivant du groupe symétrique S_{10} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 10 & 5 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

   Écrire σ, σ^2 et σ^{-1} comme des produits de cycles.

2. Soit $V_4 := \{e, (1,2)\cdot(3,4), (1,3)\cdot(2,4), (1,4)\cdot(2,3)\}$. Montrez que V_4 est un sous-groupe normal de S_4 et A_4. Montrez que $A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
3. Montrez que $V_4 = [A_4, A_4]$.
4. Montrez que $S_4/V_4 \cong S_3$.

Exercice 3 Soit S_n le groupe symétrique et D_n le groupe diédral (i.e. le groupe des isométries d'un n-gone régulier).

1. Montrez que pour $n \geq 3$, il existe un homomorphisme de groupe injectif $i : D_n \hookrightarrow S_n$.
2. Explicitez l'image de D_4 dans S_4.
3. Montrez que $i(D_4)$ est un 2-sous-groupe de Sylow de S_4.
4. Calculez le nombre de 2-sous-groupes de Sylow de S_4. Que peut-on dire de la normalité de $i(D_4)$?

Exercice 4

1. Soient G un groupe, $H \subset G$ un sous-groupe et $\psi : G \to G'$ un homomorphisme de groupes. Montrez que si G est résoluble, alors il en est de même de H, $\mathrm{Im}(\psi)$ et $G/\mathrm{Ker}(\psi)$.
2. Soit $1 \to K \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} L \to 1$ une *suite exacte courte*, i.e. φ est un monomorphisme, ψ est un epimorphisme et $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$. Montrez que G est résoluble si et seulement si K et L sont résolubles.

Le but des deux prochains exercices est de montrer le théorème suivant.

Théorème. Tout groupe non-abélien d'ordre strictement plus petit que 60 n'est pas simple.

Au cours, on a vu les propositions suivantes.

Proposition. Soient p et q deux nombres premiers distincts.

i) Tout p-groupe d'ordre non premier n'est pas simple.

ii) Tout groupe d'ordre pq n'est pas simple.

iii) Tout groupe d'ordre p^2q n'est pas simple.

Exercice 5 (Bonus)

1. Listez les cas qui ne sont pas concernés par la proposition (pour démontrer le théorème ci-dessus).
2. Montrez que tout groupe d'ordre 40 admet un unique 5-sous-groupe de Sylow. Montrez que tout groupe d'ordre 42 admet un unique 7-sous-groupe de Sylow et tout groupe d'ordre 54 admet un unique 3-sous-groupe de Sylow.

Exercice 6 (Bonus)

1. Montrez que tout groupe d'ordre 30 admet soit un unique 5-sous-groupe de Sylow, soit un unique 3-sous-groupe de Sylow.
2. Montrez que tout groupe d'ordre 56 admet soit un unique 7-sous-groupe de Sylow, soit un unique 2-sous-groupe de Sylow.
3. Montrez que tout groupe G d'ordre 24 ou 48 admet soit un unique 2-sous-groupe de Sylow, soit un homomorphisme non-trivial de G dans S_3 dont le noyau nous fournit un sous-groupe normal de G.

   (*Indication: s'il existe plus qu'un 2-Sylow, en choisir un, disons P, et laisser agir le groupe G par multiplication à gauche sur l'ensemble quotient G/P.*)
4. Montrez que tout groupe G d'ordre 36 admet soit un unique 3-sous-groupe de Sylow, soit un homomorphisme non-trivial de G dans S_4 dont le noyau nous fournit un sous-groupe normal de G.