Cours du Prof. Anand Dessai Algèbre et géométrie I

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

Série 3

À rendre avant le jeudi 12 octobre, 16h

Exercice 1 Soit $A_3 \subset S_3$ le groupe alterné.

1. Calculez toutes les classes à gauche de A_3 dans S_3.
2. Donnez un groupe K et un homomorphisme de groupes $\varphi : S_3 \to K$ tel que $\ker(\varphi) = A_3$.
3. Concluez que A_3 est un sous-groupe normal de S_3.
4. Soit G un groupe quelconque et H un sous-groupe d'indice 2. Montrez que H est un sous-groupe normal de G.

Exercice 2 Soit $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $z \in \mathcal{H}$, on définit $A * z := \frac{az+b}{cz+d}$.

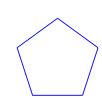
1. Montrez que cela définit une action $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H} \xrightarrow{*} \mathcal{H}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}$.
2. Quel est le stabilisateur de $i \in \mathcal{H}$? Quelle est l'orbite de $i \in \mathcal{H}$?

Exercice 3 Soit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$ le *groupe général linéaire*. On considère le sous-groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$, appelé *groupe spécial linéaire*.

1. Montrez que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \lhd \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. À l'aide de la propriété universelle du quotient, identifiez le quotient $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) / \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Soit $n \geq 3$. Le *groupe diédral*, noté D_n, est défini comme étant le groupe des isométries d'un n-gone régulier Γ_n, c.-à-d. D_n est le sous-groupe des applications orthogonales $A \in O(2)$ t.q. $A(\Gamma_n) = \Gamma_n$.

pentagone régulier ($n = 5$)



Exercice 4 On sait que le groupe diédral D_6 est isomorphe à $\langle \sigma, \tau \mid \sigma^6 = \tau^2 = e, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$ (voir bonus exercice).

1. Calculez l'ordre de $\sigma\tau$.
2. Montrez que $Z(D_6) = \{e, \sigma^3\}$.
3. Trouvez toutes les classes de conjugaison de D_6.
4. Vérifiez l'équation des classes.

Bonus exercice

1. Montrez qu'il existe un sous-groupe cyclique C de D_n, à n éléments, et constitué de rotations. Exhibez plusieurs exemples de sous-groupes à 2 éléments de D_n.
2. Montrez que D_n possède $2n$ éléments.
3. Montrez que
$$\langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = e, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$$
est une *présentation* de D_n c.-à-d. $D_n \cong \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = e, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$.
4. Montrez que D_3 est isomorphe à S_3.