Cours du Prof. Anand Dessai Algèbre et géométrie I

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

Série 2

À rendre avant le jeudi 5 octobre, 16h

Exercice 1 Soit $\Phi : G \to H$ un homomorphisme. Montrez que

a) $\Phi(e) = e$ et $\Phi(x^{-1}) = \Phi(x)^{-1} \quad \forall\, x \in G$.

b) ker (Φ) est un sous-groupe de G et im (Φ) est un sous-groupe de H.

c) Φ est un monomorphisme $\iff$ ker $(\Phi) = \{e\}$.

Exercice 2

a) Soit G un groupe d'ordre $\mathrm{ord}(G) < 6$. Montrez que G est abélien.

b) Soit G un groupe d'ordre $\mathrm{ord}(G) = 19$. Montrez que G est abélien.

c) Soit G un groupe fini. Montrez que $x^{\mathrm{ord}(G)} = e \quad \forall\, x \in G$.

Exercice 3

a) Soit G un groupe cyclique d'ordre 20. Montrez que G contient 5 sous-groupes propres.

b) Soit G un groupe d'ordre 20 et H un groupe d'ordre 153. Montrez que chaque homomorphisme $\varphi : G \to H$ est trivial (i.e. $\varphi(x) = e \;\forall\, x \in G$).

Exercice 4 Soit G un groupe fini. On définit le centre $Z(G)$ du groupe G par

$$Z(G) = \{z \in G \mid xz = zx \quad \forall\, x \in G\}$$

et l'ensemble des automorphismes intérieurs $\mathrm{Inn}(G)$ par

$$\mathrm{Inn}(G) = \{\varphi : G \to G \mid \exists\, g \in G \text{ t.q. } \varphi(x) = gxg^{-1} \quad \forall\, x \in G\}.$$

a) Montrez que $Z(G)$ est un sous-groupe normal abélien de G.

b) Soit $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G. Montrez que $\mathrm{Inn}(G)$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(G)$.

c) Montrez que $G/Z(G)$ est isomorphe à $\mathrm{Inn}(G)$.