Cours du Prof. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE I

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

SÉRIE 1

À rendre avant le jeudi 28 septembre, 16h

Exercice 1 (4 points)
Montrez que l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M(2\times 2;\mathbb{R}) \,\middle|\, a^2+b^2 \neq 0 \right\}$$

muni du produit matriciel est un groupe. Le groupe est-il abélien ? Il est possible d'identifier ce groupe avec un groupe bien connu. Voyez-vous lequel ?

Exercice 2 (4 points)

1. On considère le groupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
   (a) Montrez que $G = \{1, -1, i, -i\}$ est un sous groupe de $\mathbb{C}^*$.
   (b) Montrez que $G \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.
2. Soit G un groupe d'ordre 4. Montrez que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 3 (4 points)

1. Montrez que si G est un groupe tel que $x^2 = e$, pour tout $x \in G$, alors G est abélien.
2. Montrez que si G est un groupe fini abélien, alors $\prod_{x\in G} x^2 = e$.
3. Trouvez un groupe fini abélien où $\prod_{x\in G} x \neq e$.

Exercice 4 (4 points)
Montrez les isomorphismes suivants :

$$(\mathrm{SO}(2), \circ) \cong \left(\mathbb{S}^1, \cdot\right) \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)\,.$$