UNI
FR
UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Cours du Prof. Anand Dessai — ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

SÉRIE 12
À rendre avant le **lundi 28 mai, 13h**

Exercice 1

1. Montrez que $\mathcal{D}er_p(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}(p)^* := \mathrm{Hom}(\mathcal{E}(p), \mathbb{R})$.

2. Soit $\varphi : M \to N$ différentiable avec $q := \varphi(p)$ et soit $\varphi^* : \mathcal{E}(q) \to \mathcal{E}(p), g \mapsto g \circ \varphi$. Montrez que l'on a alors

$$\varphi^*(\lambda g + \tilde{g}) = \lambda \varphi^*(g) + \varphi^*(\tilde{g})$$
$$\varphi^*(g \cdot \tilde{g}) = \varphi^*(g) \cdot \varphi^*(\tilde{g})$$

(i.e. φ^* est un homomorphisme d'algèbres).

3. Montrez que

$$\Theta : T_pM \to \mathcal{D}er_p(M), [\gamma] \mapsto \{f \mapsto (f \circ \gamma)'(0)\}$$

est une application linéaire.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $q := f(0)$. Montrez que la forme linéaire $df : \mathcal{D}er_0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbb{R}\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle = \mathcal{D}er_0(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{f_*} \mathcal{D}er_q(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \cong \mathbb{R}$$

est égale à $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i$ où $dx_1, \ldots, dx_n \in \mathcal{D}er_0(\mathbb{R}^n)^* \cong T_0^*\mathbb{R}^n$ est la base duale de la base $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ de $\mathcal{D}er_0(\mathbb{R}^n) \cong T_0\mathbb{R}^n$.

Exercice 3

(a) Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\omega : V \times \ldots \times V \to \mathbb{R}$ une k-forme alternée. Montrez que

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = sgn(\sigma) \cdot \omega(v_1, \ldots, v_k), \quad \forall \sigma \in S_k, \forall v_i \in V$$

(b) Soit $\omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\omega(\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right)) := ad - bc$.

Montrez que $\omega \in Alt^2(\mathbb{R}^2)$, et décrivez les composantes de ω pour la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$, ainsi que pour la base $(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$.