

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

SÉRIE 11

À rendre avant le jeudi 17 mai, 16h

Attention : Dans la semaine 14-18 mai le cours a lieu lundi 13-15 et mardi 15-17 et l'exercice a lieu jeudi 8-10 !!!

Exercice 1 Soit M une variété différentiable de dimension m , $p \in M$ et U un voisinage ouvert de p dans M .

(a) Soient $\gamma, \tilde{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ des courbes différentielles, $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p$, et h_α, h_β des cartes de M en p . Montrez l'implication

$$(h_\alpha \circ \gamma)'(0) = (h_\alpha \circ \tilde{\gamma})'(0) \Rightarrow (h_\beta \circ \gamma)'(0) = (h_\beta \circ \tilde{\gamma})'(0).$$

(b) On remarque que h_α définit une structure d'espace vectoriel sur $T_p M$ via

$$(h_\alpha)_* : T_p M \rightarrow T_{h_\alpha(p)} \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m.$$

Montrez que la structure d'espace vectoriel est indépendante du choix de la carte (i.e. h_β donne la même structure d'espace vectoriel).

Exercice 2

1. Soit $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable. Montrez qu'il existe deux points $p, q \in S^n$, $p \neq q$, avec $(f_*)_p = (f_*)_q = 0$.
2. Soit $c \geq 0$ une constante et

$$\phi_c : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2 - c.$$

Dessinez l'image réciproque $\phi_c^{-1}(0)$ pour $c = 0$ et $c > 0$. Pour quel $c \geq 0$ est-ce que $0 \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière ?¹

¹ $0 \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière si pour chaque point $p \in (\phi_c)^{-1}(0)$ la différentielle $((\phi_c)_*)_p : T_p \mathbb{R}^3 \rightarrow T_0 \mathbb{R}$ est surjective.