UNI
FR
UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

**Cours du Prof. Anand Dessai** ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

SÉRIE 10

*À rendre avant le* **lundi 14 mai, 13h**

**Attention : Dans la semaine 14-18 mai le cours a lieu lundi 13-15 et mardi 15-17 et l'exercice a lieu jeudi 8-10 !!!**

---

**Exercice 1** Déterminez lesquels des revêtements suivants sont isomorphes :

a) $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto z^2$;

b) $\mathbb{C}^* \times \{0,1\} \to \mathbb{C}^*, (z,n) \mapsto z$;

c) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}^*, (x,t) \mapsto t \cdot e^{4\pi i x}$;

d) $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto z^4$;

e) $Z \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}^*, (x,t) \mapsto t \cdot e^{4\pi i x}$ où $Z$ est l'espace quotient $Z := [0,1]/\{0,1\}$.

**Exercice 2** On considère le revêtement $p : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ (voir série 8, ex. 4). Soit $x_0 := p(1,0,0) \in \mathbb{R}P^2$.

a) Montrez que l'application $S^2 \to S^2$, $x \mapsto -x$, est un automorphisme (transformation de Deck) du revêtement. Déterminez le group des automorphismes $\mathcal{D}$.

b) Montrez que $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(Vous pouvez utiliser le fait que $S^2$ est simplement connexe.)

**Exercice 3** Soit $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, ainsi que $N := (1,0,\dots,0)$, $S := (-1,0,\dots,0)$, $U_N := S^n - \{N\}$ et $U_S := S^n - \{S\}$. On considère aussi les applications

$$h_N : U_N \to \mathbb{R}^n, \quad (x_0,\dots,x_n) \mapsto \frac{(x_1,\dots,x_n)}{(1-x_0)},$$
$$h_S : U_S \to \mathbb{R}^n, \quad (x_0,\dots,x_n) \mapsto \frac{(x_1,\dots,x_n)}{(1+x_0)}.$$

Montrez que $\{h_N, h_S\}$ est un atlas différentiel de $S^n$.

**Exercice 4** Soient $M$ et $M'$ deux variétés différentiables ainsi que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ leurs atlas différentiels respectifs. Définissez une structure de variété différentiable sur le produit $M \times M'$.