Cours du Prof. Anand Dessai — Algèbre et géométrie II

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

Série 9

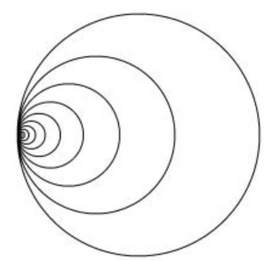
À rendre avant le jeudi 3 mai, 16h

Exercice 1 Déterminez lesquelles des applications continues suivantes $f : S^1 \to S^1$ admettent un relevé $\tilde{f} : S^1 \to S^1$ pour le revêtement $p : S^1 \to S^1, z \mapsto z^4$ (justifiez votre réponse).

1. $f : S^1 \to S^1, z \mapsto z^5$.
2. $f : S^1 \to S^1, z \mapsto z^{12}$.

Exercice 2 Soit $p : E \to B$ un revêtement avec $b_0 \in B$, $e_0 \in E$ tel que $p(e_0) = b_0$. Soient X un espace connexe par arc, $x_0 \in X$ et $f : X \to B$ une application continue telle que $f(x_0) = b_0$. Montrez qu'il existe *au plus un* relevé $\tilde{f} : X \to E$ tel que $\tilde{f}(x_0) = e_0$.

Exercice 3 Déterminez lesquels des espaces suivants sont semi-localement simplement connexes: a) $\mathbb{R}^n$, b) S^1, c) le tore $S^1 \times S^1$, d) les boucles d'oreilles hawaiienne.



Exercice 4 Soit $p : E \to B$ un revêtement avec $b_0 \in B$, $e_0 \in E$ tel que $p(e_0) = b_0$.

1. Soit $\tilde{\alpha} : I \to E$ un chemin avec $\tilde{\alpha}(0) = e_0$ et $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{e}_0 \in p^{-1}(b_0)$ et soit $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$. Montrez que les sous-groupes $p_*(\pi_1(E, e_0))$ et $p_*(\pi_1(E, \tilde{e}_0))$ sont conjugués dans $\pi_1(B, b_0)$ par $[\alpha]$, i.e.
$$p_*(\pi_1(E, e_0)) = [\alpha] \cdot p_*(\pi_1(E, \tilde{e}_0)) \cdot [\alpha]^{-1},$$
où $[\alpha]$ désigne la classe d'homotopie de α dans $\pi_1(B, b_0)$.
2. Soit H un sous-groupe de $\pi_1(B, b_0)$ conjugué à $p_*(\pi_1(E, e_0))$. Montrez qu'il existe un point $\tilde{e}_0 \in p^{-1}(b)$ tel que $H = p_*(\pi_1(E, \tilde{e}_0))$.
3. Supposons maintenant que E est connexe par arc et localement connexe par arc et soit $p' : E' \to B$ un revêtement avec E' connexe par arc et localement connexe par arc, et soit $e'_0 \in E'$ tel que $p'(e'_0) = b_0$. Montrez que $E \cong E'$ si et seulement si $p'_*(\pi_1(E', e'_0))$ et $p_*(\pi_1(E, e_0))$ sont conjugués dans $\pi_1(B, b_0)$.