

On rappelle la définition suivante :

Un revêtement $p : E \rightarrow B$ est une application continue surjective telle que pour tout $b \in B$ il existe un voisinage ouvert $U \subset B$, tel que $U \ni b$ et $p^{-1}(U) = \bigcup_j V_j$, où $V_j \subset E$ sont des ouverts, et chaque $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ est un homéomorphisme.

Dans ce cas, p est appelée *application de revêtement*.

Exercice 1 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications de revêtement ? Justifiez votre réponse.

1. $p_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, x \mapsto x + \mathbb{Z}$.
2. $p_2 : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^{2018}$.
3. $p_3 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^{2018}$.
4. $p_4 : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$.

Exercice 2

1. Soit $p : E \rightarrow B$ une application de revêtement et $b \in B$. Montrez que $p^{-1}(\{b\})$ est un ensemble discret. De plus, soit B un espace connexe. Montrez que si $p^{-1}(\{b\})$ est un ensemble avec exactement k éléments, alors pour tout $b' \in B$ l'ensemble $p^{-1}(\{b'\})$ contient aussi exactement k éléments. Pour l'exemple 3 dans exercice 1, calculez explicitement $p_3^{-1}(\{1\})$ et $p_3^{-1}(\{0\})$.
2. Soient $p : E \rightarrow B$ un revêtement, $B_0 \subset B$ un sous-espace et $E_0 := p^{-1}(B_0)$. Montrez que la restriction $p|_{E_0} : E_0 \rightarrow B_0$ est aussi un revêtement.

Exercice 3 Soient X, Y deux espaces topologiques, $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. Soit $Z := X \times Y$ muni de la topologie produit et soit $z_0 := (x_0, y_0) \in Z$.

Montrez que $\pi_1(Z, z_0) \cong \pi_1(X, (x_0)) \times \pi_1(Y, (y_0))$. Déterminez le groupe fondamental du tore plein $S^1 \times \overline{B}^2$.

Exercice 4 Soit $\mathbb{R}P^n := S^n / \sim$ l'espace projectif réel de dimension n muni de la topologie du quotient (où $x \sim y \iff x = y$ ou $x = -y$). Montrez que $\mathbb{R}P^n$ est un espace Hausdorff, compact et connexe par arcs. Montrez que l'application quotient $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ est un revêtement.