**Cours du Prof. Anand Dessai** ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

SÉRIE 7

*À rendre avant le jeudi 19 avril, 16h*

### Exercice 1

1. Trouvez un cercle $C \subset \mathbb{C} - \{i\}$ qui est un rétract de $\mathbb{C} - \{i\}$ .
2. Soient $X$ un espace topologique, $p, q \in X$ et $\alpha, \beta : I \to X$ deux chemins de $p$ à $q$. Montrez que si $X$ est simplement connexe, alors $\alpha$ et $\beta$ sont homotopes comme chemins de $p$ à $q$ (c.-à-d. $\alpha \simeq_p \beta$).

### Exercice 2

1. Soit $A \subset X$ un rétract de $X$ et $r : X \to A$ une rétraction. Montrez que pour tout $a_0 \in A$ l'homomorphisme $r_* : \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(A, a_0)$ est surjectif.
2. Soient $A$ un rétract de $\overline{B}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $f : A \to A$ continue. Montrez que $f$ a un point fixe, c.-à-d. il existe un point $a \in A$ avec $f(a) = a$.

### Exercice 3

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$ tel que $\det A \neq 0$ et $a_{ij} \geq 0$ pour tout $i, j$. Montrez que $A$ possède une valeur propre réelle strictement positive.

**Exercice 4** Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$ et $U(a, b) := \{a + nb \in \mathbb{Z} \,|\, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$. La topologie des *entiers premiers* sur $\mathbb{Z}$ est la topologie pour laquelle un ensemble $V \subseteq \mathbb{Z}$ est ouvert si $V = \emptyset$ ou pour tout $a \in V$, il existe $b \neq 0$ tel que $U(a, b) \subseteq V$.

1. Montrez que la topologie des entiers premiers définit une topologie sur $\mathbb{Z}$.
2. Est-ce que $\mathbb{Z}$ muni de la topologie des entiers premiers est Hausdorff? Compact? Connexe?
3. Montrez l'existence d'une infinité de nombres premiers grâce à cette topologie!

   *Indication: Commencez par montrer que tout $U(a, b)$ est fermé pour $b \neq 0$. Remarquer que tout ensemble ouvert non-vide est infini. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Supposez maintenant par l'absurde qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers $p \in \mathcal{P}$ et considérer l'ensemble*

$$\left( \bigcup_{p \in \mathcal{P}} U(0, p) \right)^c := \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{p \in \mathcal{P}} U(0, p).$$