Cours du Prof. Anand Dessai Algèbre et géométrie II

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

Série 6

À rendre avant le jeudi 12 avril, 16h

Exercice 1

1. Soit $f : X \to Y$ une application continue et soit X connexe (respectivement connexe par arcs). Montrez que $f(X)$ est connexe (respectivement connexe par arcs).
2. Soient X et Y deux espaces connexes (respectivement connexes par arcs). Montrez que $X \times Y$ est connexe (respectivement connexe par arcs).

Exercice 2

1. Soit X un espace topologique et soit $f : [0,1] \longrightarrow X$ un chemin dans X. Soit e_q le chemin constant sur $q := f(1)$. Montrez que $[f] \star [e_q] = [f]$.
2. Montrez que pour un espace topologique X, avec $x_0, x_1 \in X$ et α, β deux chemins de x_0 à x_1 tels que $\alpha \simeq_p \beta$. Alors on a que les homomorphismes
$$\hat{\alpha}, \hat{\beta} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$
sont égaux.

Exercice 3

1. Soient X un espace topologique, $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue et $a, b \in \mathrm{im}(f)$. Montrez que si X est connexe, alors pour tout $c \in \mathbb{R}$ avec $a \leq c \leq b$, c est dans l'image de f.
2. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrez qu'il existe $x \in [0,1]$ avec $f(x) = x$ (i.e. f admet un *point fixe*).
3. Soit $f : S^1 \to \mathbb{R}$ continue. Alors il existe $z \in S^1$ avec $f(z) = f(-z)$.

Exercice 4 Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble étoilé (voir série 5, ex. 4). Montrez que A est simplement connexe (i.e. A est connexe par arcs et $\pi_1(A, a) = \{e\}$ pour tout $a \in A$).