UNI FR

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Cours du Prof. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

SÉRIE 5

À rendre avant le jeudi 29 mars, 16h

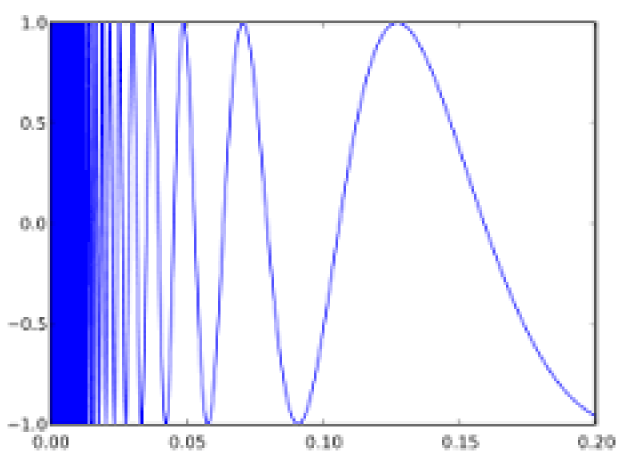
Exercice 1

1. Soit X un espace topologique et soit $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ muni de la topologie induite. Montrez que X est connexe si et seulement si toute application continue $X \to \mathbb{Z}$ est constante.
2. Soient X un espace topologique, J un ensemble et $A_\alpha \subset X$, $\alpha \in J$. Supposons que $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$, $\forall\, \alpha, \beta \in J$. Montrez que $\cup_\alpha A_\alpha$ est connexe si A_α est connexe pour tout $\alpha \in J$.

Exercice 2 Montrez que la sphère S^2 et que le tore $S^1 \times S^1$ sont des espaces connexes.

Exercice 3

1. Soit $X := \{x = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{(x, \frac{1}{x}) | x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Est-ce que X est connexe ?
2. Soient $X_1 := \{(x, y) \mid y = \sin(\frac{1}{x}), x > 0\}$, $X_2 := \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$ et $Y := X_1 \cup X_2$. On sait que $Y = \overline{X_1}$. Montrez que Y est connexe mais n'est pas connexe par arcs. L'espace X_1 est appelée le *sinus du topologue*.



Exercice 4 Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ étoilé, c.-à-d. il existe un $a_0 \in A$, tel que pour tout $a \in A$ le segment $\{ta + (1-t)a_0 \mid t \in I\}$ est contenu dans A. Soit X un espace topologique et soit $f : X \to A$ une application continue. Montrez que f est homotope à une application constante. Décrivez $[X, A]$.