Cours du Prof. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

SÉRIE 4

À rendre avant le jeudi 22 mars, 16h

Exercice 1 Déterminez tous les points d'accumulation de A et tous les points isolés de A pour les sous-espaces suivants (justifiez votre réponse):

1. $A := \mathbb{N} \cup \{\frac{3n-1}{n} \mid n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$
2. $A := \{\frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$

Exercice 2

(a) Décrivez les compactifiés d'Alexandrov de

$$(0,1), \quad (0,1] \text{ et } B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 | |x| < 1\}.$$

(b) Soit X un espace séparé et localement compact. On dit que $U \subset X^+$ est *ouvert dans le compactifié d'Alexandrov de* X si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) U est ouvert dans X,

(ii) $U = X^+ - C$ où $C \subset X$ est un sous-ensemble compact.

Montrez que cela définit une topologie sur X^+.

Exercice 3

1. Soient X, Y deux espaces topologiques. Montrez que la projection $\pi_X : X \times Y$, $(x, y) \mapsto x$, est ouverte. Montrez que si Y est compact la projection π_X est fermée. Montrez que la projection $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$, n'est pas fermée.
2. Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces topologiques. Montrez que si f est continue et Y Hausdorff, alors le graphe

$$G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y | x \in X\}$$

dans $X \times Y$ est fermé. Inversement, montrez que si G_f est fermé et Y compact, alors f est continue.

Exercice 4

1. Soient $X := [-2, 2]$ (muni de la topologie canonique), $A := [-1, 1] \subset X$ et $f : X \to X/A$ l'application quotient. Montrez que X/A est compact et f est fermée. Montrez que f n'est pas ouverte.

2. Montrez que si X est un espace normal et $A \subset X$ est fermé, alors X/A est normal.

Exercice 5 (Bonus) Montrez que si X est un espace compact Hausdorff, alors le cône

$$CX := (X \times I)/(X \times \{1\})$$

est homéomorphe au compactifié d'Alexandrov de $X \times [0, 1)$.