UNI
FR

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Cours du Prof. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

SÉRIE 3

À rendre avant le jeudi 15 mars, 16h

Exercice 1

1. Soit X un espace topologique. Soient $D \subset X$ un sous-espace fermé et $C \subset D$ un sous-espace fermé pour la topologie induite sur D. Montrez que C est fermé dans X.
2. Soient X un espace séparé et $D \subset X$ un sous-espace. Montrez que D est séparé.
3. Soient X et Y des espaces séparés. Montrez que les espaces $X \times Y$ et $X + Y$ sont séparés.

Exercice 2 On considère la topologie standard de $\mathbb{R}^n$. En utilisant la *définition topologique* de compacité, déterminez si les espaces suivants sont compacts ou non. Justifiez votre réponse !

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \ \mid \ |x_i| \leq 10 \quad \forall\, i\}, \quad \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (-1, 1], \quad \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

Exercice 3 Soient X un espace topologique, Y un espace topologique compact et $N \subset X \times Y$ un voisinage ouvert de $\{x_0\} \times Y$. Montrez que N contient un voisinage ouvert de $\{x_0\} \times Y$ de la forme $W \times Y$. Un tel voisinage est appelé un *tube* autour de $\{x_0\} \times Y$.

Exercice 4 On considère les groupes de matrices $O(n, \mathbb{R})$ et $SL(n, \mathbb{R})$ avec la topologie induite de $\mathbb{R}^{n^2}$. Montrez que $O(n, \mathbb{R})$ est compact, mais que $SL(n, \mathbb{R})$ n'est pas compact pour $n > 1$.
Indication: Pour $O(n, \mathbb{R})$, trouvez une bonne caractérisation des matrices. Pour $SL(n, \mathbb{R})$, trouvez une suite qui n'est pas bornée. Ensuite, utilisez Heine-Borel.