UNI FR

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Cours du Prof. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

SÉRIE 2

À rendre avant le jeudi 8 mars, 16h

Exercice 1

1. Soit X un espace métrique. Soient $B_{\epsilon_1}(x_1), B_{\epsilon_2}(x_2)$ deux boules ouvertes dans X et soit $U := B_{\epsilon_1}(x_1) \cap B_{\epsilon_2}(x_2)$. Montrez que pour tout point $x \in U$ il existe $\epsilon > 0$ t.q. $B_\epsilon(x) \subset U$.
2. Soient X, Y deux espaces métriques. Montrez qu'une application $f : X \to Y$ est continue si et seulement si pour chaque $x \in X$ et $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$.
3. (Bonus) Soit $\mathbb{R}$ muni de la métrique standard et soit $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ muni de la métrique induite. Montrez que la topologie de $\mathbb{Z}$ est la topologie discrète. Montrez que toute application continue $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ est constante.
4. Déterminez toutes sortes de topologies sur l'ensemble $\{a, b, c\}$ pour quelles $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ et $\{b, c\}$ sont des ouverts.

Exercice 2 Soit X un espace métrique muni d'une métrique d et $A \subset X$. Pour tout $x \in X$ on définit $d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$. Montrez que :

1. l'application $X \to \mathbb{R}, x \mapsto d(x, A)$, est continue.
2. $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$. [1]

Exercice 3 Soit X un espace topologique et Y un espace métrique. Une suite d'applications $f_n : X \to Y$ **converge uniformément** vers une application $f : X \to Y$ si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $x \in X$ et tout $n \geq N_\varepsilon$ on a $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Montrez que si les f_n sont continues, alors f est continue.

Exercice 4 Soient X et Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue (pour la topologie métrique).

(ii) Pour tout $x \in X$ et toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, [2] implique $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

[1] L'**adhérence** de A (Abschluss von A), notée $\overline{A}$, est définie comme étant l'intersection de tous les ensembles fermés contenant A, i.e.

$$\overline{A} = \bigcap \left\{ \tilde{A} \mid A \subseteq \tilde{A}, \tilde{A} \text{ est fermé} \right\}.$$

[2] $\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff$ pour tout voisinage U de x il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U \ \forall\, n \geq n_0$.