UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

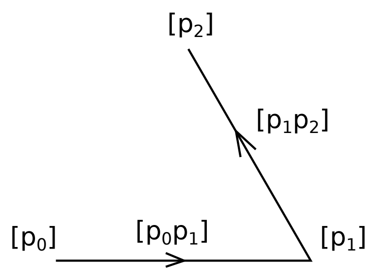
Cours du Prof. Anand Dessai ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE II

Davide Bolognini & Jonathan Wermelinger

SÉRIE 1

À rendre avant le jeudi 1 mars, 16h

Exercice 1 Soit X le complexe simplicial suivant :

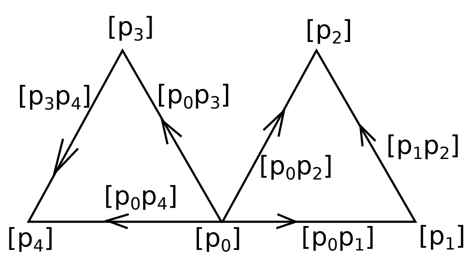


Calculez le noyau et l'image de

$$\partial_1 : C_1(X) = \mathbb{Z}[p_0p_1] \oplus \mathbb{Z}[p_1p_2] \longrightarrow \mathbb{Z}[p_0] \oplus \mathbb{Z}[p_1] \oplus \mathbb{Z}[p_2] = C_0(X).$$

Déterminez $H_i(X)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2 Soit X le complexe simplicial suivant :



Soient

$$\begin{aligned} C_1(X) &:= \mathbb{Z}[p_0p_1] \oplus \mathbb{Z}[p_1p_2] \oplus \mathbb{Z}[p_0p_2] \oplus \mathbb{Z}[p_0p_3] \oplus \mathbb{Z}[p_3p_4] \oplus \mathbb{Z}[p_0p_4] \text{ et} \\ C_0(X) &:= \mathbb{Z}[p_0] \oplus \mathbb{Z}[p_1] \oplus \mathbb{Z}[p_2] \oplus \mathbb{Z}[p_3] \oplus \mathbb{Z}[p_4]. \end{aligned}$$

Calculez le noyau et l'image de

$$\partial_1 : C_1(X) \longrightarrow C_0(X)$$

Déterminez $H_0(X)$ et $H_1(X)$.

Exercice 3

(a) Dessinez la boule de rayon $\varepsilon > 0$ pour la métrique

$$d(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrez que la métrique d induit la topologie standard de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 Sur un ensemble X, on dit qu'un sous-ensemble U de X est ouvert pour la *topologie cofinie* si le complément $X - U$ est fini ou $U = \emptyset$.

(a) Montrez que X muni de la topologie cofinie est un espace topologique.

(b) Pour $X = \mathbb{R}$, montrez que la topologie standard est *plus fine* que la topologie cofinie, c.-à-d. tout sous-ensemble ouvert dans la topologie cofinie est un sous-ensemble ouvert dans la topologie standard.

(c) Trouvez un sous-ensemble ouvert de la topologie standard de $\mathbb{R}$ qui n'est pas ouvert pour la topologie cofinie.