

Prüfungstoff Topologie

(Algebra & Geometrie II, 2018)

Der Prüfungstoff umfasst die Vorlesungen und die Übungsaufgaben.

Es folgt eine unvollständige Liste von DEFINITIONEN, *Beispielen* und **Theoremen** aus der Topologie Vorlesung:

SIMPLIZIALE HOMOLOGIE, RANDOPERATOR	HOMOLOGIE SIMPLICIALE, OPÉRATEUR DE BORD
-------------------------------------	--

Ein-dimensionale Beispiele

Exemples en dimension un

Allgemeine Topologie

Topologie générale

TOPOLOGIE, TOPOLOGISCHER RAUM, OFFENE MENGEN, ABGESCHLOSSENE MENGEN

TOPOLOGIE, ESPACE TOPOLOGIQUE, PARTIES OUVERTES, PARTIES FERMÉES

STETIGE ABBILDUNGEN, HOMÖOMORPHISMEN, $X \approx Y$, OFFENE ABBILDUNGEN, GESCHLOSSENE ABBILDUNGEN

APPLICATIONS CONTINUES, HOMÉOMORPHISMES, $X \approx Y$, APPLICATIONS OUVERTES, APPLICATIONS FERMÉES

UMGEBUNG EINES PUNKTES, BASIS DER TOPOLOGIE, SUBBASIS, ERZEUGTE TOPOLOGIE, KLEINERE TOPOLOGIE

VOISINAGE D'UN POINT, BASE DE LA TOPOLOGIE, SOUS-BASE, TOPOLOGIE ENGENDRÉE, TOPOLOGIE MOINS FINE

METRISCHE RÄUME, OFFENER ϵ -BALL, VON DER METRIK INDUZIERTE TOPOLOGIE

ESPACES MÉTRIQUES, BOULE OUVERTE DE RAYON ϵ , TOPOLOGIE INDUITE PAR LA MÉTRIQUE

Standardtopologie auf dem \mathbb{R}^n , Klumpentopologie, diskrete Topologie, Teilraumtopologie, Produkttopologie auf $X \times Y$, topologische Summe $X + Y$

topologie standard sur \mathbb{R}^n , topologie grossière, topologie discrète, topologie de sous-espace, topologie produit sur $X \times Y$, somme topologique $X + Y$

$X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, A)$, ist stetig.

$X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, A)$, est continue.

Urysohns Lemma für metrische Räume.

Théorème d'Urysohn pour les espaces métriques.

Tietze Erweiterungslemma für metrische Räume.

Théorème de Tietze pour les espaces métriques.

OFFENE ÜBERDECKUNG, ENDLICHE TEILÜBERDECKUNG, KOMPAKTE RÄUME

RECOUVREMENT OUVERT, SOUS-RECOUVREMENT FINI, ESPACES COMPACTS

stetige Bilder und abgeschl. Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt
 X, Y sind kompakt $\implies X \times Y, X + Y$ sind kompakt

l'image continue et le sous-esp. fermé des espaces compacts sont compacts
 X, Y sont compacts $\implies X \times Y, X + Y$ sont compacts

$(0, 1]$ ist nicht kompakt,
 $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$ ist kompakt

$(0, 1]$ n'est pas compact,
 $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$ est compact

HAUSDORFFSCHE RÄUME, NORMALE RÄUME, LIMES EINER FOLGE

ESPACES SÉPARÉS, ESPACES NORMAUX, LIMITE D'UNE SUITE

Beispiel eines nicht Hausdorffschen Raums. Beispiel eines Hausdorffschen Raums, der nicht normal ist.

exemple d'espace non séparé, exemple d'espace séparé mais pas normal.

Produkt, Summe und Teilräume von Hausdorffschen Räumen sind Hausdorffsch

produit, somme et sous-espace des espaces séparés sont séparés

metrische Räume und diskrete Räume sind Hausdorffsche Räume

espaces métriques et espaces discrètes sont séparés

X Hausdorff, $A \subset X$, A kompakt $\implies A$ abgeschlossen.

X séparé, $A \subset X$, A compact $\implies A$ fermé.

X kompakt und Hausdorff $\implies X$ normal.

X compact et séparé $\implies X$ normal.

Satz von Heine-Borel

Théorème de Heine-Borel

$f : X \rightarrow Y$ bijektiv stetig, X kompakt, Y Hausdorff $\implies f$ Homöomorphismus

$f : X \rightarrow Y$ une bijection continue, X compact, Y séparé $\implies f$ homéo.

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, X kompakt $\implies f$ nimmt Max./Min. an

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue, X compact $\implies f$ atteint ses bornes (max/min)

HÄUFUNGSPUNKT, ISOLIERTER PUNKT

POINT D'ACCUMULATION, POINT ISOLÉ

Satz von Bolzano-Weierstrass

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Lemma von Lebesgue

Lemme de Lebesgue

PRODUKT- UND “BOX”-TOPOLOGIE	TOPOLOGIE PRODUIT ET DE «BOX»
Satz von Tychonoff (ohne Beweis)	Théorème de Tychonoff (sans dém.)
LOKAL KOMPAKTE RÄUME	ESPACES LOCALEMENT COMPACTS
X lokal kompakt und Hausdorff \implies jede Umgebung enthält eine kompakte Umgebung	X localement compact et séparé \implies tout voisinage contient un voisinage compact
EINPUNKTKOMPAKTIFIZIERUNG X^+ , EIGENTLICHE ABBILDUNGEN	COMPACTIFIÉ D’ALEXANDROV X^+ , APPLICATION PROPRE
X lokal kompakt $\implies X^+$ kompakt und $X \approx (X^+ - \{\infty\})$	X localement compact $\implies X^+$ compact et $X \approx (X^+ - \{\infty\})$
X, Y lokal kompakt, $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann gilt: f eigentlich $\iff \exists$ stetige Fortsetzung $f^+ : X^+ \rightarrow Y^+$	X, Y localement compact, $f : X \rightarrow Y$ continue. Alors on a : f propre $\iff f$ se prolonge en une application continue $f^+ : X^+ \rightarrow Y^+$
$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^k$	$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^k$
QUOTIENTENTOPOLOGIE, QUOTIENTENABBILDUNG, QUOTIENTENRAUM	TOPOLOGIE QUOTIENT, APPLICATION QUOTIENT, ESPACE QUOTIENT
X/\sim , Quotientenraum bzgl. einer Äquivalenzrelation	X/\sim , espace quotient de X par la relation d’équivalence \sim .
reell projektive Raum $\mathbb{R}P^n$	espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$
Universelle Eigenschaft der Quotiententopologie	Propriété universelle de la topologie quotient
$\bar{B}^n/\partial\bar{B}^n \approx S^n, \mathbb{C}/L \approx T = S^1 \times S^1$, Ankleben einer Zelle, $Y := \mathbb{R}/\sim$, wo $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$, X/A , der Kegel CX von X	$\bar{B}^n/\partial\bar{B}^n \approx S^n, \mathbb{C}/L \approx T = S^1 \times S^1$, attacher une cellule, $Y := \mathbb{R}/\sim$, où $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$, X/A , le cône CX de X
REGULÄRE RÄUME	ESPACES RÉGULIERS
$A \subset X$ abgeschlossen. Dann gilt: X regulär $\implies X/A$ Hausdorffsch X normal $\implies X/A$ normal	$A \subset X$ fermé. Alors on a : X régulier $\implies X/A$ séparé X normal $\implies X/A$ normal

ABBILDUNGSZYLINDER M_f , ABBILDUNGSKEGEL C_f CYLINDRE DE L'APPLICATION M_f , CÔNE DE L'APPLICATION C_f

ZUSAMMENHÄNGENDE RÄUME, WEGZUSAMMENHÄNGENDE RÄUME ESPACES CONNEXES, ESPACES CONNEXES PAR ARCS

die zusammenhängenden Teilräume von \mathbb{R} sind die Intervalle les parties connexes de \mathbb{R} sont les intervalles

wegzusammenhängend \implies zusammenhängend connexe par arcs \implies connexe

Beispiel eines zusammenhängenden Raums, der nicht wegzusammenhängend ist *Exemple d'un espace connexe, non connexe par arcs*

X (weg)zusammenhängend und f stetig $\implies f(X)$ (weg)zusammenhängend X connexe (par arcs) et f continue $\implies f(X)$ connexe (par arcs)

X, Y (weg)zusammenhängend $\implies X \times Y$ (weg)zusammenhängend X, Y connexes (par arcs) $\implies X \times Y$ connexe (par arcs)

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der "Box"-Topologie ist nicht zusammenhängend (ohne Bew.) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie de «box» n'est pas connexe (sans dém.)

$A \subset X$ zusammenhängender Teilraum, $A \subset B \subset \bar{A} \implies B$ zusammenhängend $A \subset X$ sous-espace connexe, $A \subset B \subset \bar{A} \implies B$ connexe

$A_\alpha \subset X$ zusammenhängend und $p \in A_\alpha \forall \alpha \implies \bigcup_\alpha A_\alpha$ zusammenhängend $A_\alpha \subset X$ connexe et $p \in A_\alpha \forall \alpha \implies \bigcup_\alpha A_\alpha$ connexe

ZUSAMMENHANGSKOMPONENTEN COMPOSANTES CONNEXES

Komponenten sind zusammenhängend, abgeschlossen und disjunkt composantes connexes sont connexes, fermées et deux à deux disjoints

Fundamentalgruppe und Überlagerungen

HOMOTOPIE ZWISCHEN ZWEI ABBILDUNGEN $f, \tilde{f} : X \rightarrow Y$, $f \simeq \tilde{f}$, NULL-HOMOTOPE ABBILDUNGEN, MENGE DER HOMOTOPIEKLASSEN $[X, Y]$

HOMOTOPIE ZWISCHEN ZWEI ABBILDUNGEN VON PAAREN $f, \tilde{f} : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, MENGE DER HOMOTOPIEKLASSEN $[(X, A), (Y, B)]$

HOMOTOPIE VON WEGEN, $f \simeq_p \tilde{f}$
ADDITION VON WEGEN, $f \star g$

$$f \simeq_p \tilde{f}, g \simeq_p \tilde{g} \implies f \star g \simeq_p \tilde{f} \star \tilde{g},$$

FUNDAMENTALGRUPPE $\pi_1(X, x_0)$ VON X ZUM BASISPUNKT x_0

$\pi_1(X, x_0)$ ist eine Gruppe

$$X \text{ konvex} \implies \pi_1(X, x_0) = 0$$

STERNFÖRMIGE TEILMENGE DES \mathbb{R}^n

$$A \text{ sternförmig} \implies \pi_1(A, x_0) = 0$$

Weg γ von x_0 nach x_1 definiert Isomorphismus $\hat{\gamma} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$,
 $\gamma \simeq_p \alpha \implies \hat{\gamma} = \hat{\alpha}$

X wegzusammenhängend
 $\implies \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$

EINFACH ZUSAMMENH. RÄUME

$h : X \rightarrow Y$ STETIG
 $\rightsquigarrow h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, h(x_0))$,
 $h \simeq \hat{h} \implies h_* = \hat{h}_*$

h_* Homomorphismus, id_* ist die Identität und $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$
 h Homöomorphismus $\implies h_*$ Iso.

Groupe fondamental et théorie des revêtements

HOMOTOPIE ENTRE DEUX APPLICATIONS $f, \tilde{f} : X \rightarrow Y$, $f \simeq \tilde{f}$, APPLICATION HOMOTOPIQUEMENT NULLE, ENSEMBLE DES CLASSES D'ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE $[X, Y]$

HOMOTOPIE ENTRE DEUX APPLICATIONS $f, \tilde{f} : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, ENSEMBLE DES CLASSES D'ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE $[(X, A), (Y, B)]$

HOMOTOPIE COMME CHEMINS, $f \simeq_p \tilde{f}$
ADDITION DE CHEMINS, $f \star g$

$$f \simeq_p \tilde{f}, g \simeq_p \tilde{g} \implies f \star g \simeq_p \tilde{f} \star \tilde{g},$$

GROUPE FONDAMENTAL $\pi_1(X, x_0)$ DE X BASÉ EN x_0

$\pi_1(X, x_0)$ est un groupe

$$X \text{ convexe} \implies \pi_1(X, x_0) = 0$$

SOUS-ESPACE ÉTOILÉ DE \mathbb{R}^n

$$A \text{ étoilé} \implies \pi_1(A, x_0) = 0$$

chemin γ joignant x_0 à x_1 définit un isomorph. $\hat{\gamma} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$,
 $\gamma \simeq_p \alpha \implies \hat{\gamma} = \hat{\alpha}$

X connexe par arcs
 $\implies \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$

ESPACES SIMPLEMENT CONNEXES

$h : X \rightarrow Y$ CONTINUE
 $\rightsquigarrow h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, h(x_0))$,
 $h \simeq \hat{h} \implies h_* = \hat{h}_*$

h_* homomorphisme, id_* est l'identité et $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$
 h homeomorphisme $\implies h_*$ iso.

$\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ (der Beweis benutzt Lemma 2.33 und Korollar 2.35)

$\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ (la démonstration utilise le lemme 2.33 et le corollaire 2.35)

RETRAKTION $r : X \rightarrow A$, RETRAKT $A \subset X$

RÉTRACTION $r : X \rightarrow A$, RETRACT $A \subset X$

$j : A \hookrightarrow X$ Retrakt mit Retraktion $r : X \rightarrow A$. Dann gilt: j_* ist injektiv und r_* ist surjektiv.

$j : A \hookrightarrow X$ retract et $r : X \rightarrow A$ une rétraction. Alors on a : j_* est injective et r_* est surjective.

S^1 ist kein Retrakt von \bar{B}^2

S^1 n'est pas un retract de \bar{B}^2

Für eine stetige Abb. $h : S^1 \rightarrow X$ gilt: h null-homotop $\iff h$ kann auf \bar{B}^2 stetig fortgesetzt werden $\iff h_*$ ist trivial

Pour une application continue $h : S^1 \rightarrow X$ on a : h est homotopiquement nulle $\iff h$ a une extension continue $\bar{B}^2 \rightarrow X \iff h_*$ est trivial

Die Inklusion $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ist nicht null-homotop

L'inclusion $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ n'est pas homotopiquement nulle

Zu jedem nirgends verschwindenden Vektorfeld V auf \bar{B}^2 gibt es $p, q \in S^1$ mit $V(p) = \lambda \cdot p$, $V(q) = \mu \cdot q$ und $\lambda > 0$, $\mu < 0$

Pour tout champ de vecteurs V sur \bar{B}^2 sans zéro il existe $p, q \in S^1$ t.q. $V(p) = \lambda \cdot p$, $V(q) = \mu \cdot q$ et $\lambda > 0$, $\mu < 0$

Brouwerscher Fixpunktsatz für \bar{B}^2

Théorème du point fixe de Brouwer pour \bar{B}^2

Existenz eines positiven Eigenwertes für eine (3×3) -Matrix mit positiven Einträgen

Existence d'une valeur propre positive pour une (3×3) -matrice dont tous les coefficients sont positifs

Fundamentalsatz der Algebra

Théorème fondamental de l'algèbre

ÜBERLAGERUNG $p : E \rightarrow B$, BASIS, TOTALRAUM, ÜBERLAGERUNGS-ABBILDUNG, BLÄTTER

REVÊTEMENT $p : E \rightarrow B$, BASE, ESPACE TOTAL, APPLICATION DU REVÊTEMENT, FEUILLETS

$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = (\cos t, \sin t)$,
 $p_n : S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^n$,
 $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$

$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = (\cos t, \sin t)$,
 $p_n : S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^n$,
 $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$

LOKALER HOMÖOMORPHISMUS

HOMÉOMORPHISME LOCAL

Jede Überlagerungsabbildung ist ein lokaler Homöomorphismus

Tout revêtement est un homéomorphisme local

Das Produkt von zwei Überlagerungen und die Einschränkung von Überlagerungen sind Überlagerungen

Le produit de deux revêtement et la restriction du revêtement sont revêtements

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \approx S^1 \times S^1$$

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \approx S^1 \times S^1$$

LIFT (HOCHHEBUNG) VON WEGEN

RELÈVEMENT (RELEVÉ) DES CHEMINS

Zu $\alpha : [a, b] \rightarrow B$ stetig und $e_0 \in p^{-1}(\alpha(a))$ gibt es genau einen Lift $\tilde{\alpha}$ mit der Anfangswert $\tilde{\alpha}(0) = e_0$

Pour $\alpha : [a, b] \rightarrow B$ continue et $e_0 \in p^{-1}(\alpha(a))$ il existe un relevé unique $\tilde{\alpha}$ avec valeur initiale $\tilde{\alpha}(0) = e_0$

Sei $H : Z \times [0, 1] \rightarrow B$ stetig, $h_0 : Z \rightarrow B$ stetig mit $h_0(z) := H(z, 0)$ und $\tilde{h}_0 : Z \rightarrow E$ ein Lift von $h_0 : Z \rightarrow B$. Dann gibt es genau einen Lift $\tilde{H} : Z \times [0, 1] \rightarrow E$ von H mit Anfangswert $\tilde{H}(z, 0) = \tilde{h}_0(z)$

Soit $H : Z \times [0, 1] \rightarrow B$ continue, $h_0 : Z \rightarrow B$ continue avec $h_0(z) := H(z, 0)$ et $\tilde{h}_0 : Z \rightarrow E$ un relevé de $h_0 : Z \rightarrow B$. Alors il existe un relevé unique $\tilde{H} : Z \times [0, 1] \rightarrow E$ de H avec valeur initiale $\tilde{H}(z, 0) = \tilde{h}_0(z)$

$\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow B$ homotop, $\alpha \simeq_p \beta$, und $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow E$ Lifts von α, β mit gleichem Anfangswert, d.h. $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$. Dann gilt: $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ und $\tilde{\alpha} \simeq_p \tilde{\beta}$.

$\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow B$ homotop, $\alpha \simeq_p \beta$, et $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow E$ relevés de α, β avec la même valeur initiale, $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$. Alors on a : $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ et $\tilde{\alpha} \simeq_p \tilde{\beta}$.

$\pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0)$ ist injektiv.

$\pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0)$ est injectif.

CHARAKTERISTISCHE UNTERGRUPPE EINER ÜBERLAGERUNG

SOUS-GROUPE CARACTERISTIQUE DE REVÊTEMENT

Sei $F : (Z, z_0) \rightarrow (B, b_0)$ stetig. Hat F einen Lift $(Z, z_0) \rightarrow (E, e_0)$ in der Überlagerung $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$, so ist $F_*(\pi_1(Z, z_0))$ Untergruppe der charakteristischen Untergruppe. Für Z wegzusammenhängend gibt es höchstens einen Lift $(Z, z_0) \rightarrow (E, e_0)$.

Soit $F : (Z, z_0) \rightarrow (B, b_0)$ continue. Si F admet un relevé $(Z, z_0) \rightarrow (E, e_0)$ dans le revêtement $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$, alors $F_*(\pi_1(Z, z_0))$ est un sous-groupe de sous-groupe caractéristique. Pour Z connexe par arcs il existe au plus un relevé $(Z, z_0) \rightarrow (E, e_0)$.

LOKAL WEGZUSAMMENHÄNGEND

LOCALEMENT CONNEXE PAR ARCS

Beispiel eines wegzusammenhängenden Raums, der nicht lokal wegzusammenhängend ist

Exemple d'un espace connexe par arcs mais non localement connexe par arcs

Ist Z wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, dann gilt:
 F hat Lift $\tilde{F} : (Z, z_0) \rightarrow (E, e_0)$ in der Überlagerung $\iff F_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$

Soit Z connexe par arcs et localement connexe par arcs. Alors on a :
 F admet un relevé $\tilde{F} : (Z, z_0) \rightarrow (E, e_0)$ dans le revêtement $\iff F_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$

ISOMORPHISMUS ZWISCHEN ZWEI ÜBERLAGERUNGEN $E \xrightarrow{p} B$ UND $E' \xrightarrow{p'} B$, DECKTRANSFORMATION, GRUPPE \mathcal{D} DER DECKTRANSFORMATIONEN

ISOMORPHISME ENTRE DEUX REVÊTEMENTS $E \xrightarrow{p} B$ ET $E' \xrightarrow{p'} B$, TRANSFORMATION DE DECK, GROUPE \mathcal{D} DE TRANSFORMATIONS DE DECK

Für E, E' wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend gilt:
 Es gibt einen Iso. $\Phi : E \rightarrow E'$ mit $\Phi(e_0) = e'_0 \iff p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e'_0))$

Pour E, E' connexes par arcs et localement connexes par arcs on a :
 Il existe un iso. $\Phi : E \rightarrow E'$ avec $\Phi(e_0) = e'_0 \iff p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e'_0))$

$E \rightarrow B$ Überlagerung, E wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, $e_0, \tilde{e}_0 \in E$ mit $p(e_0) = p(\tilde{e}_0)$. Dann gilt:
 Es gibt $\varphi \in \mathcal{D}$ mit $\varphi(e_0) = \tilde{e}_0 \iff p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, \tilde{e}_0))$

$E \rightarrow B$ un revêtement, E connexe par arcs et localement connexe par arcs, $e_0, \tilde{e}_0 \in E$ avec $p(e_0) = p(\tilde{e}_0)$. Alors on a :
 Il existe $\varphi \in \mathcal{D}$ avec $\varphi(e_0) = \tilde{e}_0 \iff p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, \tilde{e}_0))$

$p : E \rightarrow B$ und $p' : E' \rightarrow B'$ Überlagerungen, E, E' wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, $e_0 \in E, e'_0 \in E'$ mit $p(e_0) = p'(e'_0) =: b_0$. Dann gilt:
 Es gibt Isomorphismus $\Phi : E \rightarrow E'$ (nicht notwendig $e_0 \mapsto e'_0$) $\iff p_*(\pi_1(E, e_0))$ und $p'_*(\pi_1(E', e'_0))$ sind in $\pi_1(B, b_0)$ konjugiert.

$p : E \rightarrow B$ et $p' : E' \rightarrow B'$ deux revêtements, E, E' connexes par arcs et localement connexes par arcs, $e_0 \in E, e'_0 \in E'$ avec $p(e_0) = p'(e'_0) =: b_0$. Alors on a :
 Il existe un isomorphisme $\Phi : E \rightarrow E'$ (pas nécessairement $e_0 \mapsto e'_0$) $\iff p_*(\pi_1(E, e_0))$ et $p'_*(\pi_1(E', e'_0))$ sont conjugués dans $\pi_1(B, b_0)$.

Isomorphieklassen von wegzusammenhängenden Überlagerungen der S^1

classes d'isomorphie de revêtements connexes du cercle S^1

Sei $E \rightarrow B$ eine Überlagerung, E wegzusammenhängend $\implies \mathcal{D}$ operiert frei auf E .

Soit $E \rightarrow B$ un revêtement, E connexe par arcs \implies l'operation de \mathcal{D} sur E est libre.

EIGENTLICH DISKONTINUIERLICHE OPERATIONEN

OPERATION PROPREMENT DISCONTINUE

$E \rightarrow B$ Überlagerung, E wegzusammenhängend $\implies \mathcal{D}$ operiert eigentlich diskontinuierlich auf E .

$E \rightarrow B$ revêtement, E connexe par arcs $\implies \mathcal{D}$ opère de façon proprement discontinument sur E .

Ist E wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Ist G eine Gruppe von Homöomorphismen, die auf E eigentlich diskontinuierlich operiert, so ist $p : E \rightarrow B := E/G$ eine Überlagerung. (ohne Beweis)

Soit E connexe par arcs et localement connexe par arcs. Si G est un groupe d'homomorphismes qui opère proprement discontinument sur E , alors $p : E \rightarrow B := E/G$ est un revêtement. (sans dém.)

Operation von \mathbb{Z} auf \mathbb{R} , Operation von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ auf S^1 .

Operation de \mathbb{Z} sur \mathbb{R} , Operation de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur S^1 .

UNIVERSELLE ÜBERLAGERUNG
SEMILOKAL EINFACH ZUSAMMENHÄNGENDER RAUM

REVÊTEMENT UNIVERSEL
ESPACE SEMI-LOCALEMENT SIMPLEMENT CONNEXE

Sei B wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend und sei $b_0 \in B$ (Basispunkt). Dann gilt:

1) B besitzt eine universelle Überlagerung.

2) Für jede Untergruppe $H \subset \pi_1(B, b_0)$ gibt es eine Überlagerung $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ mit charakteristischer Untergruppe H .

(nur Beweisidee)

Soit B connexe par arcs, localement connexe par arcs et soit $b_0 \in B$ (point de base). Alors on a :

1) B admet un revêtement universel.

2) Pour tout sous-groupe $H \subset \pi_1(B, b_0)$ il existe un revêtement $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ t.q. le groupe caractéristique est égal à H .

(seulement l'idée de la démonstration)

Sei $G := \pi_1(B, b_0)$ und H charakteristische Untergruppe einer Überlagerung mit wegzusammenhängendem und lokal wegzusammenhängendem Totalraum. Dann ist die Gruppe der Decktransformationen \mathcal{D} isomorph zur Quotientengruppe $N_G(H)/H$. (ohne Beweis)

Soit $G := \pi_1(B, b_0)$ et soit H le sous-groupe caractéristique d'un revêtement avec espace total connexe par arcs et localement connexe par arcs. Alors, le groupe de transformations de Deck \mathcal{D} est isomorph à groupe quotient $N_G(H)/H$. (sans dém.)

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

n -DIMENSIONALE TOPOLOGISCHE MANNIGFALTIGKEIT, KARTE, ATLAS, KARTENWECHSEL
DIFFERENZIERBARER ATLAS, DIFFERENZIERBARE STRUKTUR, DIFFERENZIERBARE MANNIGFALTIGKEIT

\mathbb{R}^n , $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmenge, Sphäre S^n , Torus $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten
die topologische Summe von n -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit,
das Produkt von zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, offene Teilmengen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten

DIFFERENZIERBARE ABBILDUNGEN ZWISCHEN DIFFERENZIERB. MANNIGFALTIGKEITEN, DIFFEOMORPHISMEN

jede Mannigfaltigkeit M ist lokal kompakt, lokal weg-zusammenhängend, semilokal einfach zusammenhängend und es gilt:
 M zusammenhängend $\iff M$ weg-zusammenhängend

ÄQUIVALENZ VON KURVEN, TANGENTIALVEKTOREN, TANGENTIALRAUM T_pM , DIFFERENTIAL φ_* EINER DIFFERENZIERBAREN ABBILDUNG φ

$U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $p \in U \implies T_pU \cong \mathbb{R}^m$ (kanonischer Isomorphismus), das Differential von Karten induziert auf dem Tangentialraum T_pM eine Vektorraumstruktur

Variétés différentielles

VARIÉTÉ TOPOLOGIQUE DE DIMENSION n , CARTE, ATLAS, CHANGEMENT DE CARTES
ATLAS DIFFÉRENTIEL, STRUCTURE DIFFÉRENTIELLE, VARIÉTÉ DIFFÉRENTIELLE

\mathbb{R}^n , $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, sphère S^n , tore $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sont des variétés différentielles
la somme topologique des variétés différentielles de dimension n est une variété différentielle de dimension n ,
le produit des deux variétés différentielles est une variété différentielle, chaque ouvert d'une variété différentielle est une variété différentielle

APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES ENTRE VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES, DIFFÉOMORPHISMES

chaque variété est localement compact, localement connexe par arcs, semi-localement simplement connexe et on a :
 M connexe $\iff M$ connexe par arcs

RELATION D'ÉQUIVALENCE DES COURBES, VECTEURS TANGENT, L'ESPACE TANGENT T_pM , DIFFÉRENTIELLE φ_* D'UNE APPLICATION DIFFÉRENTIABLE φ

$U \subset \mathbb{R}^m$ ouvert, $p \in U \implies T_pU \cong \mathbb{R}^m$ (isomorphisme canonique), en utilisant les différentielles des cartes l'espace tangent T_pM est un espace vectoriel

φ_* wird lokal in Karten durch die Jacobi-Matrix beschrieben	Localement la différentielle φ_* est représenté par la matrice jacobienne
FUNKTIONSKEME, DERIVATIONEN, VEKTORRAUM DER DERIVATIONEN $Der_p M$, DAS DIFFERENTIAL φ_* IST EINE AB- BILDUNG ZWISCHEN DERIVATIONEN	GERMES, DÉRIVATIONS, ESPACE VEC- TORIEL DES DÉRIVATIONS $Der_p M$, LA DIFFÉRENTIELLE φ_* EST UNE AP- PLICATION ENTRE DÉRIVATIONS
$(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_m)$ ist eine Basis von $Der_q \mathbb{R}^m$	$(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_m)$ est une base de $Der_q \mathbb{R}^m$
$\Theta : T_p M \rightarrow Der_p M$ ist ein Isomor- phismus von Vektorräumen	$\Theta : T_p M \rightarrow Der_p M$ est un isomor- phisme d'espace vectoriel
REGULÄRE WERTE	VALEURS RÉGULIÈRES
Urbild jedes regulären Wertes ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeiten, Lemma von Sard (beides ohne Beweis)	pré-image de toute valeur régulière est une variété différentielle, Lemme de Sard (sans dém.)
TANGENTIALBÜNDEL TM	FIBRÉ TANGENT TM
$T\mathbb{R}^m, TU$ für U offene Teilmenge des \mathbb{R}^m .	$T\mathbb{R}^m, TU$ pour U un ouvert de \mathbb{R}^m .
TM ist $2m$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit	TM est une variété différentielle de dimension $2m$
k -FACH LINEARE UND ALTERNIERENDE k -LINEARE FORMEN FÜR EINEN m -DIMENSIONALEN VEKTORRAUM V , $Alt^k(V)$	FORME k -LINÉAIRE ET FORME k - LINÉAIRE ALTERNÉE POUR UN ES- PACE VECTORIEL V DE DIMENSION m , $Alt^k(V)$
\det ist alternierende m -Form	\det est une m -forme alternée
KOMPONENTEN EINER ALTERNIEREN- DEN k -FORM BZGL. EINER BASIS	COMPOSANTES DE FORME k -LINÉAIRE ALTERNÉE PAR RAPPORT À UNE BASE
$Alt^k(V)$ ist ein reeller Vektorraum der Dimension $\binom{m}{k}$	$Alt^k(V)$ est un espace vectoriel réel de dimension $\binom{m}{k}$
PULLBACK ODER ZURÜCKGEHOLTE (ALTERNIERENDE) k -FORM $f^*(\omega)$ FÜR HOMOMORPHISMUS $f : V \rightarrow W$	PULL-BACK $f^*(\omega)$ D'UNE k -FORME ω POUR UN HOMOMORPHISME $f : V \rightarrow W$, $f^* : Alt^k(W) \rightarrow Alt^k(V)$

DIFFERENTIALFORMEN VOM GRAD k AUF M (k -FORMEN AUF M), $\Omega^k(M)$ FORMES DIFFÉRENTIELLES DE DEGRÉ k SUR M , $\Omega^k(M)$

PULL-BACK $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ PULL-BACK $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$
 FÜR DIFFB. ABBILDUNG $f : M \rightarrow N$ POUR UNE APPL. DIFF. $f : M \rightarrow N$

ÄUSSERE ABLEITUNG $d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ DÉRIVÉE EXTÉRIEURE $d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$

Berechnung $\ker(d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M))$ calcul de $\ker(d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M))$

ÄUSSERES (ODER DACH-)PRODUKT \wedge VON ALTERNIERENDEN FORMEN PRODUIT EXTÉRIEUR \wedge DES FORMES ALTERNÉES

Eigenschaften von \wedge propriétés de \wedge

ÄUSSERES (ODER DACH-)PRODUKT \wedge VON DIFFERENTIALFORMEN PRODUIT EXTÉRIEUR \wedge DES FORMES DIFFÉRENTIELLES

ÄUSSERE ABLEITUNG $d_M : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$, DE RHAM KOMPLEX DÉRIVÉE EXTÉRIEURE $d_M : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$, COMPLEXE DE DE RHAM

axiomatische Beschreibung der äusseren Ableitung, $d_M \circ d_M = 0$ caractérisation axiomatique de la dérivée extérieure, $d_M \circ d_M = 0$

EXAKTE UND GESCHLOSSENE k -FORMEN, k -TE DE RHAM KOHOMOLOGIE $H_{dR}^k(M)$ FORMES EXACTES ET FORMES FERMÉES, k -IÈME ESPACE VECTORIEL DE DE RHAM COHOMOLOGIE $H_{dR}^k(M)$

AUSBLICK:

PERSPECTIVE :

de Rham Kohomologie von einem Punkt, von \mathbb{R} und von S^1

de Rham cohomologie d'un point, de \mathbb{R} et de S^1

BETTIZAHLEN, RINGSTRUKTUR AUF $H^*(M)$

NOMBRES DE BETTI, STRUCTURE D'ANNEAU SUR $H^*(M)$

de Rham Kohomologie von Flächen (ohne Bew.)

de Rham cohomologie des surfaces (sans dém.)