Riemannsche Geometrie
Übungsblatt Nr. 2

Das Übungsblatt ist fakultativ und geht nicht in die Bewertung ein.
Sie haben die Möglichkeit bearbeitete Aufgaben zur Korrektur abzugeben.
Abgabe bis: Donnerstag 24. Mai 07

Aufgabe 1

1. Geben Sie eine lokale Beschreibung der Metrik auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bzgl. der Karte h_N (stereographische Projektion) in Termen der dx_i.
2. Berechnen Sie die Länge eines halben Grosskreises auf der Sphäre S^n_ε, wobei $S^n_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = \varepsilon\}$ ist.

Aufgabe 2 Für eine differenzierbare Kurve $c : [a, b] \to M$ heisst

$$E(c) := \frac{1}{2} \int_a^b |\dot{c}(t)|^2 dt$$

die *Energie*. Zeigen Sie $E(c) \geq \frac{L^2(c)}{2(b-a)}$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, also $|\dot{c}(t)|$ konstant ist.
Tip: Verwenden Sie die Cauchy–Schwarz–Ungleichung für L^2–Funktionen

$$\left(\int f \cdot g\right)^2 \leq \int f^2 \cdot \int g^2,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $f = \alpha g$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 Gegeben sei die Abbildung (Polarkoordinaten)

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) &\to \mathbb{R}^2 \\ (r, \vartheta) &\mapsto (r\cos\vartheta,\, r\sin\vartheta). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für die zurückgeholte Metrik

$$\Psi^*(g_{\text{can}})_{(r,\,\vartheta)} = dr^2 + r^2 d\vartheta^2$$

gilt.

Aufgabe 4 Seien (M, g_M) und (N, g_N) isometrische Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass dann für den Durchmesser gilt

$$\operatorname{diam}(M, g_M) = \operatorname{diam}(N, g_N).$$

Aufgabe 5 Gegeben sei die Hyperbolische Ebene

$$\mathcal{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$

mit der Metrik $g_{\text{hyp}} = \frac{g_{\text{can}}}{y^2}$. Sei weiter

$$A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

und

$$\Psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad \Psi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

die zugehörige Möbiustransformation. Zeigen Sie, dass die Ψ_A Isometrien sind.

Aufgabe 6 Sei $X \times Y$ das Vektorprodukt für $X, Y \in \Gamma(\mathbb{R}^3)$ und ∇^{can} der kanonische Zusammenhang auf $\mathbb{R}^3$.
Zeigen Sie, dass

$$(X,\, Y) \mapsto \nabla_X Y := \nabla_X^{\mathrm{can}} Y + \frac{1}{2}(X \times Y)$$

ein metrischer Zusammenhang ist, der nicht torsionsfrei ist.

Aufgabe 7 Sei $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der Levi–Civita–Zusammenhang auf M. Gegeben sei eine Kurve $c : I \to M$ und zwei Vektorfelder X und Y längs c.
Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dt}\langle X,\, Y\rangle = \left\langle \frac{DX}{dt},\, Y \right\rangle + \left\langle X,\, \frac{DY}{dt} \right\rangle.$$

Aufgabe 8 Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $0 \neq a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Kurve

$$\gamma(t) = (x_0, e^{at})$$

eine Geodäte der hyperbolischen Ebene $(\mathcal{H}, g_{\mathrm{hyp}})$ ist.

Aufgabe 9

1. Seien M und N Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\varphi : M \to N$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass φ Geodäten von M auf Geodäten von N abbildet.
2. Die Halbkreise auf der hyperbolischen Ebene $\mathcal{H}$ mit Mittelpunkt auf $\mathbb{R}$ sind Geodäten.

Aufgabe 10 Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche versehen mit der induzierten Riemannschen Metrik und $c : I \to M$ eine differenzierbare Kurve. Weiter sei

$$\begin{aligned} V &: I \to T\mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto V_1(t)\frac{\partial}{\partial x} + V_2(t)\frac{\partial}{\partial y} + V_3(t)\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

ein Vektorfeld von M entlang c, also $V(t) \in T_{c(t)}M$.
Zeigen Sie: V ist parallel entlang c (d.h. $\frac{DV}{dt} = 0$) genau dann, wenn

$$V'(t) = V_1'(t)\frac{\partial}{\partial x} + V_2'(t)\frac{\partial}{\partial y} + V_3'(t)\frac{\partial}{\partial z}$$

orthogonal zu $T_{c(t)}M$ ist.

Aufgabe 11 Sei M Riemannsche Mannigfaltigkeit, $c : [a,\, b] \to M$ stückweise differenzierbare Kurve. Zeigen Sie: Ist

$$E(\gamma) \geq E(c)$$

für jede Kurve γ, die $c(a)$ und $c(b)$ verbindet, so ist c Geodäte.
Tip: Blatt 2, Aufgabe 2.

Aufgabe 12 Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

1. Zu $p \in M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ (hinreichend klein), so dass gilt:

$$\exp_p\big(B_\varepsilon(0)\big) = B_\varepsilon(p) := \{q \in M \mid d(p,q) < \varepsilon\}$$

2. Ist $\gamma \colon [a,b] \to M$ eine *minimale Kurve*, d.h.

$$d(\gamma(a), \gamma(b)) = L(\gamma),$$

so ist $\gamma|_{[c,d]}$ minimal für jedes $[c,d] \subset [a,b]$.