

Riemannsche Geometrie

Übungsblatt Nr. 1

Das Übungsblatt ist fakultativ und geht nicht in die Bewertung ein.
Sie haben die Möglichkeit bearbeitete Aufgaben zur Korrektur abzugeben.
Abgabe bis: Freitag 20. April 07

Aufgabe 1: Sei $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $N := (1, 0, \dots, 0)$, $S := (-1, 0, \dots, 0)$, $U_N := S^n - \{N\}$, $U_S := S^n - \{S\}$,

$$h_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto \frac{(x_1, \dots, x_n)}{(1 - x_0)} \text{ und}$$

$$h_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto \frac{(x_1, \dots, x_n)}{(1 + x_0)}.$$

Zeigen Sie: $\mathcal{A} := \{h_N, h_S\}$ ist ein differenzierbarer Atlas von S^n .

Aufgabe 2: Sei

$$T^n := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \dots = |z_n| = 1\} \subset \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \text{ und}$$

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n}).$$

Sei $\epsilon > 0$ hinreichend klein gewählt (z.B. $\epsilon < \pi/2$). Für $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $p := f(a) \in T^n$,

$$U'_p := (-\epsilon, \epsilon) \times \dots \times (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n \text{ und}$$

$$U_p := f(a + U'_p) = \{f(a + x) \mid x \in U'_p\} \subset T^n.$$

Schliesslich sei $h_p : U_p \rightarrow U'_p$ die Umkehrabbildung von $\varphi_p : U'_p \rightarrow U_p$, $x \mapsto f(a + x)$.

Zeigen Sie: $\mathcal{A} := \{h_p\}_{p \in T^n}$ ist ein differenzierbarer Atlas von T^n .

Aufgabe 3: Sei

$$f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \dots, x_{2n}) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, \dots, x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1).$$

Zeigen Sie: $0 \in \mathbb{R}^n$ ist regulärer Wert von f (und somit ist der Torus $T^n = f^{-1}(0)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n}$).

Aufgabe 4*: Sei $S := \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A^T = A\}$ der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen. Zeigen Sie: Für die Abbildung

$$f : M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow S, \quad A \mapsto A \cdot A^T - E_n$$

ist $0 \in S$ regulärer Wert (und somit ist die orthogonale Gruppe $O(n) = f^{-1}(0)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2} \cong M(n \times n, \mathbb{R})$).

Aufgabe 5: (Wiederholung der Vorlesung) Sei $h : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Definieren Sie ohne Konsultation Ihrer Vorlesungsmitschrift das Differential $h_* : T_p M \rightarrow T_{h(p)} N$. Sei $Der(p) := \{ \text{Derivationen in } p \in M \}$. Definieren Sie das Differential

$$h_* : Der(p) \rightarrow Der(h(p)).$$

Zeigen Sie, dass

$$\Phi : T_p M \rightarrow Der(p) \quad [\gamma] \mapsto \Phi([\gamma]) : f \mapsto (f \circ \gamma)'(0)$$

ein Isomorphismus reeller Vektorräume ist. Zeigen Sie schliesslich, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & Der(p) \\ h_* \downarrow & & \downarrow h_* \\ T_{h(p)} N & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & Der(h(p)) \end{array}$$

Aufgabe 6: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$[\cdot, \cdot] : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$$

die Lieklammer. Zeigen Sie:

1. $[X, Y]$ ist tatsächlich ein Vektorfeld.
2. Ist $h : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus von Mannigfaltigkeiten, so gilt

$$h_*([X, Y]) = [h_*(X), h_*(Y)] \text{ für alle } X, Y \in \Gamma(M)$$

3. $[\cdot, \cdot]$ ist bilinear als Abbildung von reellen Vektorräumen.
4. $[\cdot, \cdot]$ ist anti-symmetrisch.
5. $[\cdot, \cdot]$ erfüllt die Jacobi-Identität:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \text{ für alle } X, Y, Z \in \Gamma(M)$$

6. $[f \cdot X, g \cdot Y] = f \cdot g \cdot [X, Y] + f \cdot X(g) \cdot Y - g \cdot Y(f) \cdot X$ für alle $X, Y \in \Gamma(M)$ und alle $f, g \in C^\infty(M)$

Aufgabe 7*: Seien $X, Y \in \Gamma(M)$ Vektorfelder, $p \in M$ und sei Φ_t der lokale Fluss zu X in einer Umgebung von p . Zeigen Sie:

$$[X, Y](p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y - (\Phi_t)_*(Y))(\Phi_t(p))$$

Aufgabe 8: Zeigen Sie: T^2 ist parallelisierbar.

Aufgabe 9: Zeigen Sie: Im Euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^n, g_{can})$ ist die kürzeste Verbindungskurve zwischen $p, q \in \mathbb{R}^n$ eine Gerade, z.B. $\gamma(t) := p + t \cdot (q - p)$. Zeigen Sie weiter: Für $p, q \in \mathbb{R}^n$ (versehen mit der kanonischen Riemannschen Metrik g_{can}) ist $d(p, q) = |q - p|$.

Aufgabe 10*: Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und d die induzierte Metrik auf M . Zeigen Sie:

1. Die ϵ -Bälle $B_\epsilon(p) := \{q \in M \mid d(p, q) < \epsilon\}$ sind offen in der Mannigfaltigkeit M .
2. Eine offene Menge in M ist offen bzgl. der Metrik d .