Riemannsche Geometrie

Herbst 2014

Der folgende stichwortartige Überblick ist nicht vollständig. Bitte benutzen Sie Ihre Vorlesungsmitschrift.

Topologische Grundbegriffe (Wiederholung)

1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Topologischer Raum, offene Mengen, abgeschlossene Mengen, Basis der Topologie, offene Umgebung, Hausdorffsche Räume, metrische Räume, Teilraumtopologie, stetige Abbildung, Homöomorphismus,

n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, Karten, Kartenwechsel, differenzierbarer Atlas, maximaler Atlas, differenzierbare Struktur, differenzierbare Mannigfaltigkeit, Beispiele (Sphäre, Torus, Summe, Produkt . . .), differenzierbare Abbildung, Diffeomorphismus, Orientierung, Untermannigfaltigkeit, Kodimension, Urbilder regulärer Werte sind Untermannigfaltigkeiten (ohne Beweis), Beispiele (Sphäre, Hyperboloid, Torus, $GL_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$ . . .),

2. Tangentialbündel

Tangentialvektor, Äquivalenzklassen von Kurven, Tangentialraum, $T_0\mathbb{R}^n$, T_pM sind n-dimensionale Vektorräume, Algebra der Funktionskeime $\mathcal{E}(p)$, Derivationen, partielle Ableitungen bilden Basis des Vektorraums der Derivationen, Differential h_* einer differenzierbaren Abbildung $h : M \to N$, T_pM isomorph zum Vektorraum der Derivationen in p, Immersionen, Submersionen, Einbettungen,

Tangentialbündel TM als $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit, Vektorfelder, Vektorraum $\Gamma(M)$, $f_* : \Gamma(M) \to \Gamma(N)$ für Diffeomorphismus $f : M \to N$, lokale Beschreibung eines Vektorfeldes, Fluss, Integralkurven, Vektorfeld zum Fluss, lokaler Fluss zum Vektorfeld, parallelisierbare Mannigfaltigkeit, Lieklammer von Vektorfeldern, Jacobi-Identität . . . (Übungsaufgabe)

3. Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Riemannsche Metrik, Riemannsche Mannigfaltigkeit, Produktmetrik, *Terminologie: Riemannsche Metrik wird oft einfach nur mit Metrik bezeichnet*, (Riemannsche) Metrik auf $U \subset \mathbb{R}^n$, Nash Einbettungssatz (ohne Beweis), Länge L einer Kurve, hängt nicht von der Parametrisierung ab, Kurve (proportional) nach Bogenlänge parametrisiert, zurückgeholte Riemannsche Metrik, lokale Beschreibung der Metrik via $(g_{ij})_{ij}$, Isometrien, $d : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ assoziiert zur Riemannschen Metrik ist eine Metrik, Durchmesser diam, M kompakt $\implies$ diam $< \infty$, Konstruktion von Riemannschen Metriken, jede differenzierbare Mannigfaltigkeit besitzt eine Metrik,

4. Geodäten, Zusammenhang, kovariante Ableitung

Kovariante Ableitung für den flachen $\mathbb{R}^n$ und die runde Sphäre S^n, Geraden (bzw. Grosskreise) lösen die Geodätengleichung für $\mathbb{R}^n$ (bzw. S^n), allgemeine kovariante Ableitung/Zusammenhang ∇, Levi-Civita-Zusammenhang, metrisch, torsionsfrei, auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit gibt es genau einen Levi-Civita-Zusammenhang, lokale Beschreibung der kovarianten Ableitung (Christoffelsymbole Γ_{ij}^k), Beschreibung der Γ_{ij}^k durch die Metrik, Beispiele (∇, Γ_{ij}^k für flachen $\mathbb{R}^n$, hyperbolischen Raum ...), Riemannsche Untermannigfaltigkeit $N \subset M$, Beziehung zwischen den L-C-Zusammenhängen von M und N,

kovariante Ableitung D/dt entlang einer Kurve, Existenz, Eindeutigkeit, Eigenschaften von D/dt, parallele Vektorfelder, Paralleltransport P, Geodätengleichung, lokale Beschreibung, normalisierte Geodäte, Beispiele (flacher $\mathbb{R}^n$, runde Sphäre, hyperbolischer Raum, flacher Torus, Zylinder ...), lokale Isometrie, und ihre Eigenschaften

5. Exponentialabbildung

lokale Existenz von Geodäten, Exponentialabbildung exp, $\Phi : \Omega \to M \times M$ ist lokaler Diffeomorphismus, $\exp_x : B_\epsilon(0) \to M$ Diffeomorphismus,

Gauss-Lemma, Umformulierungen,

Geodäten sind lokal kürzeste Verbindungskurven, kürzeste Verbindungskurven sind bis auf Parametrisierung Geodäten,

eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve c ist genau dann Geodäte, wenn es für jedes t ein ϵ gibt mit $L(c_{|[t,t+\epsilon]}) = d(c(t), c(t+\epsilon))$, minimale Kurven, eine stückweise differenzierbare Kurve c, welche proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, ist eine Geodäte, falls c minimal ist,

Theorem von Hopf-Rinow, in einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit lassen sich zwei Punkte immer durch eine minimale Geodäte verbinden, normale Koordinaten, Christoffelsymbole in normalen Koordinaten,

6. Exkursion: Lie Gruppen

Lie Gruppe, Homomorphismus, Theorem von Peter-Weyl (ohne Beweis), linksinvariante Vektorfelder, Beispiele ($Gl_n(\mathbb{C})$, $U(n)$), $\ldots$), linksinvariante Metrik, biinvariante Metrik, Beispiel $-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(X\cdot Y)$ für $U(n)$, $\nabla_{\underline{X}}\underline{Y}$ und Geodäten für biinvariante Metrik

7. Krümmung

$R(X,Y) : \Gamma(M) \to \Gamma M)$, Eigenschaften, Krümmungstensor $R : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$, lokale Beschreibung, erste Bianchi-Identität, weitere Eigenschaften, Beispiel: flacher $\mathbb{R}^n$,

Schnittkrümmung sec, Verhalten von ∇, R und sec unter Isometrien, Beispiele (flacher $\mathbb{R}^n$, runde Sphäre, hyperbolischer Raum), Schnittkrümmung bestimmt den Krümmungstensor (ohne Beweis), Schnittkrümmung von Lie Gruppen mit biinvarianter Metrik, Hopf-Vermutung (ohne Beweis ☹)

8. Erste und zweite Variationsformel, topologische Konsequenzen

Energie E, Variation H einer Kurve, Variationsfeld, Operator/kovariante Ableitung $\overline{D}$ für Vektorfelder entlang H, erste und zweite Variationsformel für Energie und Länge, Geodäten sind kritische Punkte des Energiefunktionals, Beziehung zwischen Länge und Energie für Kurven und Geodäten,

Ricci-Krümmung, Theorem von Bonnet-Myers, Fundamentalgruppe von kompakten Mannigfaltigkeiten mit positiver Ricci-Krümmung,

Theorem von Synge-Weinstein, Fundamentalgruppe von geraddimensionalen orientierbaren kompakten Mannigfaltigkeiten mit positiver Schnittkrümmung,

9. Jacobifelder

Variation einer Geodäten durch Geodäten, Jacobigleichung, Jacobifelder, Theorem von Cartan-Hadamard (nur Beweisidee)