

Informationen zur mündlichen Prüfung Lineare Algebra I und II 2010/11

Der Prüfungsstoff umfasst die Vorlesungen, die Übungsaufgaben (exercices) und die Anwesenheitsaufgaben (exercices de présence).

Hier eine unvollständige Liste von Definitionen und Sätzen aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II:

Definitionen

Mengen (Vereinigung, Durchschnitt, Differenzmenge, Kartesisches Produkt)

Abbildungen (injektiv, surjektiv, bijektiv, Bild, Urbild, Umkehrabbildung)

Gruppen, Ringe, Körper, Homomorphismen

Äquivalenzrelation

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (Menge der Restklassen modulo m)

komplexe Zahlen \mathbb{C}

Vektorräume, Untervektorräume, Homomorphismen/lineare Abbildungen

Bild und Kern eines Homomorphismus

Linearkombination, linear abhängig, linear unabhängig, *span*

Basis, kanonische Basis des \mathbb{K}^n

Dimension $\dim V$

Summe von Vektorräumen, direkte Summe, Projektion, komplementärer Untervektorraum

Quotientenvektorraum

Définitions

ensembles (union, intersection, différence, produit cartésien)

applications (injective, surjective, bijective, image, image réciproque, application réciproque)

groupes, anneaux, corps, homomorphismes

relation d'équivalence

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (ensemble des résidus modulo m)

nombres complexes \mathbb{C}

espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, homomorphismes/applications linéaires

image et noyau d'application linéaire

combinaison linéaire, linéairement dépendant/liée, linéairement indépendant/libre, *span*

base, base canonique de \mathbb{K}^n

dimension $\dim V$

somme des espaces vectoriels, somme directe, projection, sous-espace complémentaire/supplémentaire

espace quotient

Gauss-Algorithmus, elementare Zeilenoperationen, Zeilen-Stufen Form	méthode d'élimination de Gauss-Jordan, opérations élémentaires, matrice écholonée
Lineare Gleichungssysteme, (erweiterte) Koeffizientenmatrix	système d'équationes linéaires, matrice (augmentée) des coefficients
Matrizen, Zeilenvektoren, Spaltenvektoren, Matrizen-Multiplikation, Matrizenring $M(n \times n, \mathbb{K})$	matrices, vecteur ligne, vecteur colonne, produit de deux matrices, l'anneau des matrices $M(n \times n, \mathbb{K})$
darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi)$ eines Homomorphismus $\Phi : V \rightarrow W$ bzgl. einer Basis \mathcal{A} von V und einer Basis \mathcal{B} von W	$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi)$ = matrice de l'homomorphisme $\Phi : V \rightarrow W$ par rapport aux bases \mathcal{A} de V et \mathcal{B} de W
Homomorphismus $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ assoziiert zur Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$	homomorphisme $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ associé à une matrice $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$
$Hom(V, W), End(V), Aut(V)$	$Hom(V, W), End(V), Aut(V)$
A^T = Transponierte von A	A^T = transposée de A
invertierbare Matrizen, $Gl_n(\mathbb{K})$	matrices inversibles, $Gl_n(\mathbb{K})$
Transformationsmatrix für zwei Basen	matrice de transformation/matrice de passage entre deux bases
ähnliche (konjugierte) Matrizen, äquivalente Matrizen	matrices semblables, matrices équivalentes
Rang eines Homomorphismus, Zeilenrang $ZR(A)$, Spaltenrang $SR(A)$	rang de l'application linéaire, rang des vecteurs lignes $ZR(A)$, rang des vecteurs colonnes $SR(A)$
Axiome für die Determinante	caractérisation axiomatique du déterminant
Determinante eines Endomorphismus	déterminant d'un endomorphisme
Elementarmatrizen	matrices élémentaires
Symmetrische Gruppe S_n , Transpositionen, Inversionen, Signum $sign$	groupe symétrique S_n , transposition, inversion, signum $sign$
komplementäre Matrix $A^{\#}$	matrice complémentaire $A^{\#}$

Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume	valeur propre, vecteur propre, espace propre
diagonalisierbar, Diagonalmatrix	diagonalisable, matrice diagonale
charakteristisches Polynom	polynôme caractéristique
Polynomring $\mathbb{K}[t]$, Grad eines Polynoms	anneau des polynômes $\mathbb{K}[t]$, degré du polynôme
Vielfachheit/Multiplizität der Nullstelle $\mu(p, \lambda)$	multiplicité de la racine $\mu(p, \lambda)$
trigonalisierbar, obere (untere) Dreiecksmatrix, F -invariante Fahnen	trigonalisable, matrice triangulaire supérieure (inférieure), drapeau stable par F
Ideal, Hauptideal, Hauptidealring	idéal, idéal principal, anneau principal
Minimalpolynom M_F	polynôme minimal
nilpotente Endomorphismen	endomorphisme nilpotent
Jordanmatrix	matrice de Jordan
Verallgemeinerte Eigenräume N_λ	espaces caractéristiques N_λ
Jordan-Normalform	réduction de Jordan
Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf einem reellen Vektorraum, euklidischer Vektorraum, Norm $\ \cdot\ $, Abstand/Metrik $d(\cdot, \cdot)$, Orthogonalität \perp , Winkel	produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur un espace vectoriel réel, espace euclidien, norme $\ \cdot\ $, distance/métrique $d(\cdot, \cdot)$, orthogonalité \perp , angle
Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf einem komplexen Vektorraum, unitärer Vektorraum, Norm $\ \cdot\ $, Abstand $d(\cdot, \cdot)$, Orthogonalität \perp	produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur un espace vectoriel complexe, espace hermitien, norme $\ \cdot\ $, distance $d(\cdot, \cdot)$, orthogonalité \perp
Orthonormalbasis (ONB), orthogonale Basis	base orthonormée (ONB), base orthogonale
orthogonales Komplement, orthogonale Summe	supplémentaire orthogonal, somme directe orthogonale
orthogonale und unitäre Endomorphismen, $O(n)$, $U(n)$	endomorphismes orthogonaux et unitaires, $O(n)$, $U(n)$

Orientierung eines reellen Vektorraums

orientierungserhaltende und orientierungsumkehrende Endomorphismen

$GL_n^+(\mathbb{R}), SO(n)$

selbstadjungierte Endomorphismen, symmetrische und hermitesche Matrizen

symmetrische Bilinearform, darstellende Matrix, zugehörige quadratische Form

orientation d'un espace vectoriel réel

endomorphismes qui préserve ou renverse l'orientation

$GL_n^+(\mathbb{R}), SO(n)$

endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques, matrices hermitiennes

forme bilinéaire symétrique, représentation matricielle, forme quadratique associée

Kegelschnitte

Linearformen, Dualraum V^* , duale Abbildung F^* , duale Basis, Annulator U^0 , $V^{**} =$ Bidualraum von V , kanonischer Isomorphismus $\iota : V \rightarrow V^{**}$

Coniques

formes linéaires, espace dual V^* , application duale F^* , base duale, annulateur U^0 , $V^{**} =$ bidual de V , isomorphisme canonique $\iota : V \rightarrow V^{**}$

Sätze

Fundamentalsatz der Algebra
(ohne Beweis)

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist ein Körper $\iff m$ ist
eine Primzahl

Basis = minimales Erzeugenden-
system = max. linear unabhängi-
ges System

jeder endlich dimensionale Vek-
torraum besitzt eine Basis

Austauschsatz von Steinitz, Basi-
sergänzungssatz

Dimensionsformel für Summe von
Vektorräumen

Dimensionsformel für Bild und
Kern eines Homomorphismus $f : V \rightarrow W$

$\dim V = \dim W \iff V \cong W$

$f : V \rightarrow W$ linear, $\dim V =$
 $\dim W = n$. Dann gilt: f inj.
 $\iff f$ surj. $\iff f$ bij.

Berechnung der Lösungsmenge
des linearen Gleichungssystems
 $Ax = b$

Jede Matrix lässt sich durch
elementare Zeilenoperationen in
Zeilen-Stufen Form bringen

$M_B^A : \text{Hom}(V, W) \rightarrow M(m \times$
 $n, \mathbb{K})$ ist ein Isomorphismus von
Vektorräumen

$\dim \text{Hom}(V, W) = m \cdot n$

$M_A^A : \text{End}(V) \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$ ist
ein Isomorphismus von Ringen

A invertierbar $\iff A^T$ invertier-
bar

Théorèmes

théorème fondamental de l'al-
gèbre/théorème de D'Alembert
(sans démonstration)

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est un corps $\iff m$ est
un nombre premier

base = famille génératrice mini-
male = famille libre maximal

chaque espace vectoriel de dimen-
sion finie admet une base

lemme de Steinitz, théorème de la
base incomplète

formule de Grassmann

formule pour la dimension de
l'image et du noyau d'une appli-
cation linéaire

$\dim V = \dim W \iff V \cong W$

$f : V \rightarrow W$ linéaire, $\dim V =$
 $\dim W = n$. Alors on a : f inj.
 $\iff f$ surj. $\iff f$ bij.

Calcul d'ensembles de solutions
pour une système d'équations
linéaires $Ax = b$

Par une suite d'opérations
élémentaires on peut transformer
toute matrice en une matrice
écholonée

$M_B^A : \text{Hom}(V, W) \rightarrow M(m \times$
 $n, \mathbb{K})$ est un isomorphisme de es-
pace vectoriels

$\dim \text{Hom}(V, W) = m \cdot n$

$M_A^A : \text{End}(V) \rightarrow M(n \times n, \mathbb{K})$ est
un isomorphisme d'anneaux

A inversible $\iff A^T$ inversible

Transformationsformel für darstellende Matrizen

$$ZR(A) = SR(A)$$

A und \tilde{A} sind äquivalent $\iff A$ und \tilde{A} haben den gleichen Rang

Eigenschaften der Determinante

$\det A \neq 0 \iff A$ ist invertierbar

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

$\det(f)$ ist wohldefiniert für einen Endomorphismus f

\det existiert und ist eindeutig

jede Permutation ist Produkt von Transpositionen

$sign : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus

Leibniz-Formel für die Determinante

$$A^\sharp \cdot A = A \cdot A^\sharp = (\det A) \cdot E_n, A \text{ invertierbar} \implies A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\sharp$$

Entwicklungssatz von Laplace

Cramersche Regel

$$Eig(F; \lambda_1) \cap Eig(F; \lambda_2) = \{0\}, \text{ falls } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Hat $F \in End(V)$ n verschiedene Eigenwerte ($n = \dim V$), so ist F diagonalisierbar

$$\lambda \text{ Eigenwert von } F \iff \det(F - \lambda \cdot id) = 0$$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_F sind die Eigenwerte von F

Euklidischer Algorithmus, Division mit Rest

formule de changement de base

$$ZR(A) = SR(A)$$

A et \tilde{A} sont équivalentes $\iff rg(A) = rg(\tilde{A})$

propriétés du déterminant

$\det A \neq 0 \iff A$ est inversible

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

$\det(f)$ est bien défini pour un endomorphisme f

unicité et existence du déterminant

chaque permutation est un produit de transpositions

$sign : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ est un homomorphisme de groupes

formule de Leibniz

$$A^\sharp \cdot A = A \cdot A^\sharp = (\det A) \cdot E_n, A \text{ inversible} \implies A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\sharp$$

formule de Laplace

Règle de Cramer

$$Eig(F; \lambda_1) \cap Eig(F; \lambda_2) = \{0\} \text{ si } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Si $F \in End(V)$ admet n valeurs propre ($n = \dim V$) deux à deux distinctes, alors F est diagonalisable

$$\lambda \text{ est valeur propre de } F \iff \det(F - \lambda \cdot id) = 0$$

racines de polynôme caractéristique p_F sont les valeurs propres de F

théorème de la division euclidienne

$$p_F(t) = a_n t^n + \dots + a_0 \implies \\ a_n = (-1)^n, a_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \\ \text{tr}(F), a_0 = \det F$$

Zerlegung von reellen Polynomen
in Faktoren vom Grad 1 oder 2

$$\lambda \text{ Eigenwert von } F \in \text{End}(V) \\ \implies 1 \leq \dim \text{Eig}(F; \lambda) \leq \\ \mu(p_F; \lambda)$$

$F \in \text{End}(V)$ diagonalisierbar
 $\iff V$ ist direkte Summe der Eigenräume
 $\iff p_F$ zerfällt in Linearfaktoren
und $\dim \text{Eig}(F; \lambda) = \mu(p_F; \lambda)$
für alle λ

Lösen von Rekursionsgleichungen
und Systemen linearer Differentialgleichungen

F trigonalisierbar \iff es gibt
eine F -invariante Fahne

F trigonalisierbar $\iff p_F$
zerfällt in Linearfaktoren

jeder Endomorphismus eines
komplexen Vektorraums ist
trigonalisierbar

Satz von Cayley-Hamilton

F Endomorphismus eines reellen
Vektorraumes $V \implies$ es gibt
einen F -invarianten Untervektorraum
 W der Dimension 1 oder 2

M_F teilt p_F und p_F teilt $(M_F)^n$
(n ist die Dimension des Vektorraums)

Für F ein Endomorphismus eines
 n -dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraumes
gilt: F nilpotent $\iff p_F(t) = (-1)^n t^n$
 $\iff F^d = 0$ für ein $d \leq n$
 $\iff F$ ist durch eine obere Dreiecksmatrix
mit Nullen in der Diagonalen darstellbar

$$p_F(t) = a_n t^n + \dots + a_0 \implies \\ a_n = (-1)^n, a_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \\ \text{tr}(F), a_0 = \det F$$

décomposition d'un polynôme en
produits de polynômes de degré 1
ou 2

$$\lambda \text{ valeur propre de } F \in \text{End}(V) \\ \implies 1 \leq \dim \text{Eig}(F; \lambda) \leq \\ \mu(p_F; \lambda)$$

$F \in \text{End}(V)$ diagonalisable \iff
 V est la somme directe des espaces propres
 $\iff p_F$ est scindé
et $\dim \text{Eig}(F; \lambda) = \mu(p_F; \lambda)$ pour
tous λ

résolution d'une système de suites
récurrentes et d'une système
différentiel linéaire

F trigonalisable \iff il existe un
drapeau stable par F

F trigonalisable $\iff p_F$ est
scindé

tout endomorphisme d'un espace
vectoriel complexe est
trigonalisable

théorème de Cayley-Hamilton

F endomorphisme d'un espace
vectoriel réel $V \implies$ il existe un
sous-espace de dimension 1 ou 2
qui est stable par F

M_F divise p_F und p_F divise
 $(M_F)^n$ (n est la dimension des espace
vectoriel)

Pour F un endomorphisme d'un
espace vectoriel de dimension n
on a: F nilpotent $\iff p_F(t) = (-1)^n t^n$
 \iff il existe $d \leq n$
t.q. $F^d = 0 \iff F$ est représenté
par une matrice triangulaire supérieure
avec des coefficients nuls sur la diagonale

Jordan-Normalform für nilpotente Endomorphismen

p_F zerfällt in Linearfaktoren $\implies V$ ist direkte Summe der verallgemeinerten Eigenräume

Theorem über die Jordan-Normalform

F diagonalisierbar $\iff M_F = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_k)$

Zerlegung von Dunford: $A = D + N$, D diag., N nilpot. und $DN = ND$

Cauchy-Schwarz Ungleichung (CSU) für euklidische und unitäre Vektorräume

Gram-Schmidt Verfahren

jeder endlich dim. euklidische oder unitäre Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis (ONB)

F orthogonaler oder unitärer Endomorphismus, λ Eigenwert von $F \implies |\lambda| = 1$

ein orthogonaler oder unitärer Endomorphismus F erhält die Norm, ein orthogonaler Endomorphismus F erhält den Winkel

ein normerhaltender Endomorphismus auf einem euklidischen bzw. unitären Vektorraum ist orthogonal bzw. unitär

die orthogonalen bzw. unitären Endomorphismen auf einem euklidischen bzw. unitären Vektorraum bilden eine Gruppe

$A \in O(n) \iff A^{-1} = A^T$,
 $A \in U(n) \iff A^{-1} = \bar{A}^T$

$A \in O(n)$ oder $A \in U(n) \implies |\det A| = 1$

réduction de Jordan pour l'endomorphisme nilpotent

p_F scindé $\implies V$ est la somme directe des espaces caractéristiques

théorème de la réduction de Jordan

F diagonalisable $\iff M_F = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_k)$

décomposition de Dunford: $A = D + N$, D diag., N nilpot. et $DN = ND$

inégalité de Cauchy-Schwarz (CSU) pour les espaces euclidiens ou hermitiens

procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

tout espace euclidien ou hermitien de dimension finie admet une bases orthonormée (ONB)

F un endomorphisme orthogonal ou unitaire, λ une valeur propre de $F \implies |\lambda| = 1$

un endomorphisme orthogonal ou unitaire préserve la norme, un endomorphisme orthogonal préserve l'angle

un endomorphisme d'un espace euclidien (resp. hermitien) qui préserve la norme est orthogonal (resp. hermitien)

les endomorphismes euclidiens (resp. unitaires) d'un espace euclidien (resp. hermitien) forment un group

$A \in O(n) \iff A^{-1} = A^T$,
 $A \in U(n) \iff A^{-1} = \bar{A}^T$

$A \in O(n)$ ou $A \in U(n) \implies |\det A| = 1$

Beschreibung von $SO(2)$ und von $O(2) \setminus SO(2)$	description de $SO(2)$ et de $O(2) \setminus SO(2)$
Satz vom Fussball (Klassifikation der orthogonalen Abbildungen auf \mathbb{R}^3)	théorème de football (classification des endomorphismes orthogonaux en dimension 3)
ein unitärer Endomorphismus kann bzgl. einer ONB diagonalisiert werden	un endomorphisme unitaire est diagonalisable par rapport à une ONB
zu $A \in U(n)$ gibt es $S \in U(n)$ mit $\bar{S}^T A S$ diagonale	si $A \in U(n)$ il existe $S \in U(n)$ t.q. $\bar{S}^T A S$ est diagonale
entsprechende Aussage für orthogonale Endomorphismen	l'assertion correspondant pour des endomorphismes orthogonaux
ein selbstadjungierter Endomorphismus kann bzgl. einer ONB diagonalisiert werden und alle Eigenwerte sind reell	un endomorphisme autoadjoint est diagonalisable par rapport à une ONB et toutes les valeurs propres sont réelles
Transformationsformel für eine Bilinearform unter Basiswechsel	formule de transformation pour la forme bilinéaire sur un changement de base
Hauptachsentransformation	transformation aux axes principaux
Polarisation	polarisation
quadratische Formen ohne gemischte Terme	réduction des formes quadratiques

Klassifikation der Kegelschnitte	classification des coniques
$\dim U^0 = \dim V - \dim U$	$\dim U^0 = \dim V - \dim U$
A beschreibt $F : V \rightarrow W$ bzgl. Basen von V und $W \implies A^T$ beschreibt $F^* : W^* \rightarrow V^*$ bzgl. der dualen Basen	$F : V \rightarrow W$ est représenté par A par rapport aux bases de V et $W \implies F^* : W^* \rightarrow V^*$ est représenté par A^T par rapport aux bases duales
$rg(F) = rg(F^*), ZR(A) = SR(A)$	$rg(F) = rg(F^*), ZR(A) = SR(A)$
$\dim V < \infty \implies$ der kanonische Homomorphismus $\iota : V \rightarrow V^{**}$ ist ein Isomorphismus	$\dim V < \infty \implies$ l'homomorphisme canonique $\iota : V \rightarrow V^{**}$ est un isomorphisme