Informationen zur mündlichen Prüfung
Lineare Algebra I und II

Der Prüfungsstoff umfasst die Vorlesungen, die Übungsaufgaben (exercices) und die Anwesenheitsaufgaben (exercices de présence).

Hier eine unvollständige Liste von Definitionen und Sätzen aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II:

Definitionen

Mengen (Vereinigung, Durchschnitt, Differenzmenge, Kartesisches Produkt)
Abbildungen (injektiv, surjektiv, bijektiv, Bild, Urbild, Umkehrabbildung)
Gruppen, Ringe, Körper
Äquivalenzrelation
$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (Restklassen modulo m)
komplexe Zahlen
Vektorräume, Untervektorräume, Homomorphismen
Bild und Kern eines Homomorphismus
Linearkombination, linear abhängig, linear unabhängig, Erzeugnis (*span*)
Basis, kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$
Dimension $\dim V$
Summe von Vektorräumen, direkte Summe, Projektion, komplementärer Untervektorraum
Matrizen, Zeilenvektoren, Spaltenvektoren, Matrizen-Multiplikation, Matrizenring $M(n \times n, \mathbb{K})$
Lineare Gleichungssysteme, (erweiterte) Koeffizientenmatrix
Gauss-Algorithmus, elementare Zeilenoperationen, Zeilen-Stufen Form
darstellende Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\Phi)$ eines Homomorphismus $\Phi : V \to W$ bzgl. einer Basis $\mathcal{A}$ von V und einer Basis $\mathcal{B}$ von W
Homomorphismus $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ assoziiert zur Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$
$Hom(V, W), End(V), Aut(V)$
invertierbare Matrizen, $Gl_n(\mathbb{K})$
Transformationsmatrix für zwei Basen
ähnliche (konjugierte) Matrizen, äquivalente Matrizen
Rang eines Homomorphismus, Zeilenrang, Spaltenrang
Axiome für die Determinante
Determinante eines Endomorphismus
Symmetrische Gruppe S_n, Transpositionen, Inversionen, Signum $sign$, alternierende Gruppe A_n
komplementäre Matrix $A^\sharp$
Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume
diagonalisierbar, Diagonalmatrix
charakteristisches Polynom
Polynomring $\mathbb{K}[t]$, Grad eines Polynoms
Vielfachheit der Nullstelle $\mu(p, \lambda)$
trigonalisierbar, obere (untere) Dreiecksmatrix, F-invariante Fahnen
Ideal, Hauptideal, Hauptidealring

Minimalpolynom M_F
nilpotente Endomorphismen
Jordanmatrix
Verallgemeinerte Eigenräume N_λ
Jordan-Normalform
Quotientenvektorraum, Quotientenabbildung
Skalarprodukt $\langle \quad , \quad \rangle$ auf einem reellen Vektorraum, euklidischer Vektorraum, Norm $|| \quad ||$, Abstand $d(\quad , \quad)$, Orthogonalität $\perp$, Winkel
Skalarprodukt $\langle \quad , \quad \rangle$ auf einem komplexen Vektorraum, unitärer Vektorraum, Norm $|| \quad ||$, Abstand $d(\quad , \quad)$, Orthogonalität $\perp$
Orthonormalbasis (ONB), orthogonale Basis
orthogonales Komplement, orthogonale Summe
orthogonale und unitäre Endomorphismen, $O(n)$, $U(n)$
orientierungserhaltende und orientierungsumkehrende Endomorphismen
Orientierung eines reellen Vektorraums
$GL_n^+(\mathbb{R})$, $SO(n)$
Volumen, Gramsche Determinante
selbstadjungierte Endomorphismen, symmetrische und hermitesche Matrizen
Bilinearform s, symmetrisch, alternierend, schiefsymmetrisch
darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(s)$ einer Bilinearform s bzgl. einer Basis $\mathcal{B}$
quadratische Form q
pos. definite, neg. definite, nicht degenerierte Bilinearformen und Matrizen
Dualraum V^*, duale Abbildung F^*, duale Basis, Annulator U^0

Sätze

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist ein Körper $\iff$ m ist eine Primzahl
Basis = minimales Erzeugendensystem = max. linear unabhängiges System
jeder endlich dimensionale Vektorraum besitzt eine Basis
Austauschsatz von Steinitz, Basisergänzungssatz
Dimensionsformel für Summe von Vektorräumen
Dimensionsformel für Bild und Kern eines Homomorphismus $f : V \to W$
$\dim V = \dim W \iff V \cong W$
Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$
Jede Matrix lässt sich durch elementare Zeilenoperationen in Zeilen-Stufen Form bringen
$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} : Hom(V, W) \to M(m \times n, \mathbb{K})$ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen
$\dim Hom(V, W) = m \cdot n$
$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} : End(V) \to M(n \times n, \mathbb{K})$ ist ein Isomorphismus von Ringen
A invertierbar $\iff$ A^T invertierbar
Transformationsformel für darstellende Matrizen
Zeilenrang = Spaltenrang
A und $\widetilde{A}$ sind äquivalent $\iff$ A und $\widetilde{A}$ haben den gleichen Rang
det existiert und ist eindeutig
$\det A \neq 0 \iff A$ ist invertierbar
Multiplikationstheorem $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$
$\det(f)$ wohldefiniert für Endomorphismus f
jede Permutation ist Produkt von Transpositionen
$sign : S_n \to \{\pm 1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus
Leibniz-Formel für die Determinante
$A^\sharp \cdot A = A \cdot A^\sharp = (\det A) \cdot E_n$, A invertierbar $\implies A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\sharp$
Entwicklungssatz von Laplace
Cramersche Regel
$Eig(F; \lambda_1) \cap Eig(F; \lambda_2) = \{0\}$, falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$
Hat $F \in End(V)$ n verschiedene Eigenwerte ($n = \dim V$), so ist F diagonalisierbar
λ Eigenwert von $F \iff \det(F - \lambda \cdot id) = 0$
Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_F sind die Eigenwerte von F
Euklidischer Algorithmus, Division mit Rest
Fundamentalsatz der Algebra (ohne Beweis)
$p_F(t) = a_n t^n + \ldots + a_0 \implies a_n = (-1)^n, a_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot tr(F), a_0 = \det F$
Zerlegung von reellen Polynomen in Faktoren vom Grad 1 oder 2
λ Eigenwert von $F \in End(V) \implies 1 \leq \dim Eig(F; \lambda) \leq \mu(p_F; \lambda)$
$F \in End(V)$ diagonalisierbar $\iff$ V ist direkte Summe der Eigenräume
Lösen von Rekursionsgleichungen und Sytemen linearer Differentialgleichungen
F trigonalisierbar $\iff$ es gibt eine F-invariante Fahne
F trigonalisierbar $\iff$ p_F zerfällt in Linearfaktoren
jeder Endomorphismus eines komplexen Vektorraums ist trigonalisierbar
Satz von Cayley-Hamilton
F Endomorphismus eines reellen Vektorraumes $V \implies$ es gibt einen F-

invarianten Untervektorraum W der Dimension 1 oder 2
M_F teilt p_F und p_F teilt $(M_F)^n$ (n ist die Dimension des Vektorraums)
Für F ein Eindomorphismus eines n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes gilt:
F nilpotent $\iff$ alle Eigenwerte von F sind Null $\iff$ $p_F(t) = (-1)^n t^n$ $\iff$ $F^d = 0$ für ein $d \leq n$ $\iff$ F ist durch eine obere Dreicksmatrix mit Nullen in der Diagonalen darstellbar
Jordan-Normalform für nilpotente Endomorphismen
p_F zerfällt in Linearfaktoren $\implies$ V ist direkte Summe der verallgemeinerten Eigenräume
Theorem über die Jordan-Normalform
F diagonalisierbar $\iff$ $M_F = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_k)$
Zerlegung von Dunford: $F = D + N$, D diag., N nilpot. mit $DN = ND$
universelle Eigenschaft des Quotientenvektorraums
Cauchy-Schwarz Ungleichung (CSU) für euklidische und unitäre Vektorräume
Gram-Schmidt
jeder endlich dim. euklidische oder unitäre Vektorraum besitzt eine ONB
ein orthogonaler oder unitärer Endomorphismus F erhält die Norm
ein orthogonaler Endomorphismus F erhält den Winkel
ein normerhaltender Endomorphismus auf einem euklidischen bzw. unitären Vektorraum ist orthogonal bzw. unitär
die orthogonalen bzw. unitären Endomorphismen auf einem euklidischen bzw. unitären Vektorraum bilden eine Gruppe
$A \in O(n) \iff A^{-1} = A^T$, $A \in U(n) \iff A^{-1} = \bar{A}^T$
$A \in O(n)$ oder $A \in U(n) \implies |\det A| = 1$
Beschreibung von $SO(2)$ und $O(2) \setminus SO(2)$
Satz vom Fussball (Klassifikation von orientierungserhaltenden orthogonalen Abbildungen auf $\mathbb{R}^3$)
$|\det A|$ beschreibt Volumenverzerrung
Ungleichung von Hadamard
ein unitärer Endomorphismus kann bzgl. einer ONB diagonalisiert werden
zu $A \in U(n)$ gibt es $S \in U(n)$ mit $S^T AS$ diagonal
entsprechende Aussage für orthogonale Endomorphismen
ein selbstadjungierter Endomorphismus kann bzgl. einer ONB diagonalisiert werden und alle Eigenwerte sind reell
Transformationsformel für eine Bilinerform unter Basiswechsel
Polarisation
Hauptachsentransformation
A symmetrisch ist pos. definitiv $\iff$ alle Eigenwerte sind positiv
Trägheitssatz von Sylvester
Orthogonalisierungssatz
A beschreibt $F : V \to W$ bzgl. Basen von V und W $\implies$ A^T beschreibt $F^* : W^* \to V^*$ bzgl. der dualen Basen
$rg(F) = rg(F^*)$, $ZR(A) = SR(A)$