Informationen zur mündlichen Prüfung Lineare Algebra I und II 2008/09

Der Prüfungsstoff umfasst die Vorlesungen, die Übungsaufgaben (exercices) und die Anwesenheitsaufgaben (exercices de présence).

Hier eine unvollständige Liste von Definitionen und Sätzen aus den Vorlesungen Lineare Algebra I und II:

Definitionen	Définitions
Mengen (Vereinigung, Durchschnitt, Differenzmenge, Kartesisches Produkt)	ensembles (union, intersection, différence, produit cartésien)
Abbildungen (injektiv, surjektiv, bijektiv, Bild, Urbild, Umkehrabbildung)	applications (injective, surjective, bijective, image, image réciproque, application réciproque)
Gruppen, Ringe, Körper	groupes, anneaux, corps
Äquivalenzrelation	relation d'équivalence
$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (Menge der Restklassen modulo m)	$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (ensemble des résidus modulo m)
komplexe Zahlen $\mathbb{C}$	nombres complexes $\mathbb{C}$
Vektorräume, Untervektorräume, Homomorphismen/lineare Abbildungen	espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, homomorphisms/applications linéaires
Bild und Kern eines Homomorphismus	image et noyau d'application linéaire
Linearkombination, linear abhängig, linear unabhängig, *span*	combinaison linéaire, linéairement dépendant/liée, linéairement indépendant/libre, *span*
Basis, kanonische Basis des $\mathbb{K}^n$	base, base canonique de $\mathbb{K}^n$
Dimension $\dim V$	dimension $\dim V$
Summe von Vektorräumen, direkte Summe, Projektion, komplementärer Untervektorraum	somme des espaces vectoriels, somme directe, projection, sous-espace complémentaire/supplémentaire
Quotientenvektorraum	espace quotient

Matrizen, Zeilenvektoren, Spaltenvektoren, Matrizen-Multiplikation, Matrizenring $M(n \times n, \mathbb{K})$	matrices, vecteur ligne, vecteur colonne, produit de deux matrices, l'anneau des matrices $M(n \times n, \mathbb{K})$
Lineare Gleichungssysteme, (erweiterte) Koeffizientenmatrix	système d'équationes linéaires, matrice (augmentée) des coefficients
Gauss-Algorithmus, elementare Zeilenoperationen, Zeilen-Stufen Form	méthode d'élimination de Gauss-Jordan, opérations élémentaires, matrice écholonée
darstellende Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\Phi)$ eines Homomorphismus $\Phi : V \to W$ bzgl. einer Basis $\mathcal{A}$ von V und einer Basis $\mathcal{B}$ von W	$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\Phi)$ = matrice de l'homomorphisme $\Phi : V \to W$ par rapport aux bases $\mathcal{A}$ de V et $\mathcal{B}$ de W
Homomorphismus $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ assoziiert zur Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$	homomorphisme $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ associé à une matrice $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$
$Hom(V, W), End(V), Aut(V)$	$Hom(V, W), End(V), Aut(V)$
A^T = Transponierte von A	A^T = transposée de A
invertierbare Matrizen, $Gl_n(\mathbb{K})$	matrices inversibles, $Gl_n(\mathbb{K})$
Transformationsmatrix für zwei Basen	matrice de transformation/matrice de passage entre deux bases
ähnliche (konjugierte) Matrizen, äquivalente Matrizen	matrices semblables, matrices équivalentes
Rang eines Homomorphismus, Zeilenrang $ZR(A)$, Spaltenrang $SR(A)$	rang de l'application linéaire, rang des vecteurs lignes $ZR(A)$, rang des vecteurs colonnes $SR(A)$
Axiome für die Determinante	caractérisation axiomatique du déterminant
Determinante eines Endomorphismus	déterminant d'un endomorphisme
Symmetrische Gruppe S_n, Transpositionen, Inversionen, Signum $sign$	groupe symétrique S_n, transposition, inversion, signum $sign$
komplementäre Matrix $A^\sharp$	matrice complémentaire $A^\sharp$

Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume	valeur propre, vecteur propre, espace propre
diagonalisierbar, Diagonalmatrix	diagonalisable, matrice diagonale
charakteristisches Polynom	polynôme caractéristique
Polynomring $\mathbb{K}[t]$, Grad eines Polynoms	anneau des polynômes $\mathbb{K}[t]$, degré du polynôme
Vielfachheit/Multiplizität der Nullstelle $\mu(p, \lambda)$	multiplicité de la raçine $\mu(p, \lambda)$
trigonalisierbar, obere (untere) Dreiecksmatrix, F-invariante Fahnen	trigonalisable, matrice triangulaire supérieure (inférieure), drapeau stable par F
Ideal, Hauptideal, Hauptidealring	idéal, idéal principal, anneau principal
Minimalpolynom M_F	polynôme minimal
nilpotente Endomorphismen	endomorphisme nilpotent
Jordanmatrix	matrice de Jordan
Verallgemeinerte Eigenräume N_λ	espaces caractéristiques N_λ
Jordan-Normalform	réduction de Jordan
Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf einem reellen Vektorraum, euklidischer Vektorraum, Norm $\|\ \|$, Abstand/Metrik $d(\ ,\ )$, Orthogonalität $\perp$, Winkel	produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur un espace vectoriel réel, espace euclidien, norme $\|\ \|$, distance/métrique $d(\ ,\ )$, orthogonalité $\perp$, angle
Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf einem komplexen Vektorraum, unitärer Vektorraum, Norm $\|\ \|$, Abstand $d(\ ,\ )$, Orthogonalität $\perp$	produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur un espace vectoriel complexe, espace hermitien, norme $\|\ \|$, distance $d(\ ,\ )$, orthogonalité $\perp$
Orthonormalbasis (ONB), orthogonale Basis	base orthonormée (ONB), base orthogonale
orthogonales Komplement, orthogonale Summe	supplémentaire orthogonal, somme directe orthogonale
orthogonale und unitäre Endomorphismen, $O(n)$, $U(n)$	endomorphismes orthogonals et unitaires, $O(n)$, $U(n)$

Orientierung eines reellen Vektorraums	orientation d'un espace vectoriel réel
orientierungserhaltende und orientierungsumkehrende Endomorphismen	endomorphimes qui préserve ou renverse l'orientation
$GL_n^+(\mathbb{R})$, $SO(n)$	$GL_n^+(\mathbb{R})$, $SO(n)$
Volumen, Gramsche Determinante	volume, matrice de Gram
selbstadjungierte Endomorphismen, symmetrische und hermitesche Matrizen	endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques, matrices hermitiennes
Linearformen, Dualraum V^*, duale Abbildung F^*, duale Basis, Annulator U^0, V^{**} = Bidualraum von V, kanonischer Isomorphismus $\iota : V \to V^{**}$	formes linéaires, espace dual V^*, application duale F^*, base duale, annulateur U^0, V^{**} = bidual de V, isomorphisme canonique $\iota : V \to V^{**}$
symmetrische Bilinearform, darstellende Matrix, zugehörige quadratische Form	forme bilinéaire symétrique, représentation matricielle, forme quadratique associée

Sätze	**Théorèmes**
$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist ein Körper $\iff m$ ist eine Primzahl	$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est un corps $\iff m$ est un nombre prémier
Fundamentalsatz der Algebra (ohne Beweis)	théorème fondamental de l'algèbre/théorème de D'Alembert (sans démonstration)
Basis = minimales Erzeugendensystem = max. linear unabhängiges System	base = famille géneratrice minimale = famille libre maximal
jeder endlich dimensionale Vektorraum besitzt eine Basis	chaque espace vectoriel de dimension finie admet une base
Austauschsatz von Steinitz, Basisergänzungssatz	lemme de Steinitz, théorème de la base incomplète
Dimensionsformel für Summe von Vektorräumen	formule de Grassmann
Dimensionsformel für Bild und Kern eines Homomorphismus $f : V \to W$	formule pour la dimension de l'image et du noyau d'une application linéaire
$\dim V = \dim W \iff V \cong W$	$\dim V = \dim W \iff V \cong W$
Berechnung der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$	Calcul d'ensembles de solutions pour une système d'équationes linéaires $Ax = b$
Jede Matrix lässt sich durch elementare Zeilenoperationen in Zeilen-Stufen Form bringen	Par une suite d'opérationes élémentaires on peut transformer toute matrice en une matrice écholonée
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : Hom(V, W) \to M(m \times n, \mathbb{K})$ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen	$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : Hom(V, W) \to M(m \times n, \mathbb{K})$ est un isomorphisme de espace vectoriels
$\dim Hom(V, W) = m \cdot n$	$\dim Hom(V, W) = m \cdot n$
$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} : End(V) \to M(n \times n, \mathbb{K})$ ist ein Isomorphismus von Ringen	$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} : End(V) \to M(n \times n, \mathbb{K})$ est un isomorphisme d'anneaux
A invertierbar $\iff A^T$ invertierbar	A inversible $\iff A^T$ inversible
Transformationsformel für darstellende Matrizen	formule de changement de base

$ZR(A) = SR(A)$	$ZR(A) = SR(A)$
A und $\widetilde{A}$ sind äquivalent $\iff$ A und $\widetilde{A}$ haben den gleichen Rang	A et $\widetilde{A}$ sont équivalentes $\iff$ $rg(A) = rg(\widetilde{A})$
Eigenschaften der Determinante	propriétés du determinant
$\det A \neq 0 \iff A$ ist invertierbar	$\det A \neq 0 \iff A$ est inversible
$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$	$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$
$\det(f)$ ist wohldefiniert für einen Endomorphismus f	$\det(f)$ est bien défini pour un endomorphisme f
det existiert und ist eindeutig	unicité et existence du determinant
jede Permutation ist Produkt von Transpositionen	chaque permutation est un produit de transpositions
$sign : S_n \to \{\pm 1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus	$sign : S_n \to \{\pm 1\}$ est un homomorphisme de groupes
Leibniz-Formel für die Determinante	formule de Leibniz
$A^\sharp \cdot A = A \cdot A^\sharp = (\det A) \cdot E_n$, A invertierbar $\implies A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\sharp$	$A^\sharp \cdot A = A \cdot A^\sharp = (\det A) \cdot E_n$, A inversible $\implies A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\sharp$
Entwicklungssatz von Laplace	formule de Laplace
Cramersche Regel	Règle de Cramer
$Eig(F; \lambda_1) \cap Eig(F; \lambda_2) = \{0\}$, falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$Eig(F; \lambda_1) \cap Eig(F; \lambda_2) = \{0\}$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$
Hat $F \in End(V)$ n verschiedene Eigenwerte ($n = \dim V$), so ist F diagonalisierbar	Si $F \in End(V)$ admet n valeurs propre ($n = \dim V$) deux à deux distinctes, alors F est diagonalisable
λ Eigenwert von $F \iff \det(F - \lambda \cdot id) = 0$	λ est valeur propre de $F \iff \det(F - \lambda \cdot id) = 0$
Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_F sind die Eigenwerte von F	raçines de polynôme caractéristique p_F sont les valeurs propres de F
Euklidischer Algorithmus, Division mit Rest	théorème de la divison euclidienne

$p_F(t) = a_n t^n + \ldots + a_0 \implies a_n = (-1)^n, a_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot tr(F), a_0 = \det F$	$p_F(t) = a_n t^n + \ldots + a_0 \implies a_n = (-1)^n, a_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot tr(F), a_0 = \det F$
Zerlegung von reellen Polynomen in Faktoren vom Grad 1 oder 2	décomposition d'un polynôme en produits de polynômes de degré 1 ou 2
λ Eigenwert von $F \in End(V) \implies 1 \leq \dim Eig(F;\lambda) \leq \mu(p_F;\lambda)$	λ valeur propre de $F \in End(V) \implies 1 \leq \dim Eig(F;\lambda) \leq \mu(p_F;\lambda)$
$F \in End(V)$ diagonalisierbar $\iff V$ ist direkte Summe der Eigenräume	$F \in End(V)$ diagonalisable $\iff V$ est la somme directe des espaces propres
Lösen von Rekursionsgleichungen und Sytemen linearer Differentialgleichungen	résolution d'une système de suites récurrentes et d'une système différentiel linéaire
F trigonalisierbar $\iff$ es gibt eine F-invariante Fahne	F trigonalisable $\iff$ il existe un drapeau stable par F
F trigonalisierbar $\iff p_F$ zerfällt in Linearfaktoren	F trigonalisable $\iff p_F$ est scindé
jeder Endomorphismus eines komplexen Vektorraums ist trigonalisierbar	tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe est trigonalisable
Satz von Cayley-Hamilton	théorème de Cayley-Hamilton
F Endomorphismus eines reellen Vektorraumes $V \implies$ es gibt einen F- invarianten Untervektorraum W der Dimension 1 oder 2	F endomorphisme d'un espace vectoriel réel $V \implies$ il existe un sous-espace de dimension 1 ou 2 qui est stable par F
M_F teilt p_F und p_F teilt $(M_F)^n$ (n ist die Dimension des Vektorraums)	M_F divise p_F und p_F divise $(M_F)^n$ (n est la dimension des espace vectoriel)
Für F ein Eindomorphismus eines n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes gilt: F nilpotent $\iff p_F(t) = (-1)^n t^n \iff F^d = 0$ für ein $d \leq n \iff F$ ist durch eine obere Dreicksmatrix mit Nullen in der Diagonalen darstellbar	Pour F un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n on a: F nilpotent $\iff p_F(t) = (-1)^n t^n \iff$ il existe $d \leq n$ t.q. $F^d = 0 \iff F$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure avec des coefficients nuls sur la diagonale
Jordan-Normalform für nilpotente Endomorphismen	réduction de Jordan pour l'endomorphisme nilpotent

p_F zerfällt in Linearfaktoren $\Longrightarrow$ V ist direkte Summe der verallgemeinerten Eigenräume	p_F scindé $\Longrightarrow$ V est la somme directe des espaces caractéristiques
Theorem über die Jordan-Normalform	théorème de la réduction de Jordan
F diagonalisierbar $\iff$ $M_F = (t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_k)$	F diagonalisable $\iff$ $M_F = (t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_k)$
Zerlegung von Dunford: $F = D + N$, D diag., N nilpot. und $DN = ND$	décomposition de Dunford: $F = D + N$, D diag., N nilpot. et $DN = ND$
Cauchy-Schwarz Ungleichung (CSU) für euklidische und unitäre Vektorräume	inégalité de Cauchy-Schwarz (CSU) pour les espaces euclidiens ou hermitiens
Gram-Schmidt Verfahren	procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
jeder endlich dim. euklidische oder unitäre Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis (ONB)	tout espace euclidien ou hermitien de dimension finie admet une bases orthonormée (ONB)
ein orthogonaler oder unitärer Endomorphismus F erhält die Norm, ein orthogonaler Endomorphismus F erhält den Winkel	un endomorphisme orthogonal ou unitaire préserve la norme, un endomorphisme orthogonal préserve l'angle
ein normerhaltender Endomorphismus auf einem euklidischen bzw. unitären Vektorraum ist orthogonal bzw. unitär	un endomorphisme d'un espace euclidien (resp. hermitien) qui préserve la norme est orthogonal (resp. hermitien)
die orthogonalen bzw. unitären Endomorphismen auf einem euklidischen bzw. unitären Vektorraum bilden eine Gruppe	les endomorphismes euclidiens (resp. unitaires) d'un espace euclidien (resp. hermitien) forment un group
$A \in O(n) \iff A^{-1} = A^T$, $A \in U(n) \iff A^{-1} = \bar{A}^T$	$A \in O(n) \iff A^{-1} = A^T$, $A \in U(n) \iff A^{-1} = \bar{A}^T$
$A \in O(n)$ oder $A \in U(n) \Longrightarrow \lvert\det A\rvert = 1$	$A \in O(n)$ ou $A \in U(n) \Longrightarrow \lvert\det A\rvert = 1$
Beschreibung von $SO(2)$ und von $O(2) \setminus SO(2)$	description de $SO(2)$ et de $O(2) \setminus SO(2)$
Satz vom Fussball (Klassifikation der orthogonalen Abbildungen auf $\mathbb{R}^3$)	théorème de football (classification des endomorphismes orthogonaux en dimension 3)

$\lvert\det A\rvert$ und Volumenveränderung	$\lvert\det A\rvert$ et changement du volume
Ungleichung von Hadamard (ohne Beweis)	inégalité d'Hadamard (sans démonstration)
ein unitärer Endomorphismus kann bzgl. einer ONB diagonalisiert werden	un endomorphisme unitaire est diagonalisable par rapport à une ONB
zu $A \in U(n)$ gibt es $S \in U(n)$ mit $S^T AS$ diagonal	si $A \in U(n)$ il existe $S \in U(n)$ t.q. $S^T AS$ est diagonale
entsprechende Aussage für orthogonale Endomorphismen	l'assertion correspondant pour des endomorphismes orthogonaux
ein selbstadjungierter Endomorphismus kann bzgl. einer ONB diagonalisiert werden und alle Eigenwerte sind reell	un endomorphisme autoadjoint est diagonalisable par rapport à une ONB et tout valeurs propres sont réelles
$\dim U^0 = \dim V - \dim U$	$\dim U^0 = \dim V - \dim U$
A beschreibt $F : V \to W$ bzgl. Basen von V und $W \implies A^T$ beschreibt $F^* : W^* \to V^*$ bzgl. der dualen Basen	$F : V \to W$ est représenté par A par rapport aux bases de V et $W \implies F^* : W^* \to V^*$ est représenté par A^T par rapport aux bases duales
$im(F^*) = \ker(F)^0$, $ker(F^*) = (imF)^0$	$im(F^*) = \ker(F)^0$, $ker(F^*) = (imF)^0$
$rg(F) = rg(F^*)$, $ZR(A) = SR(A)$	$rg(F) = rg(F^*)$, $ZR(A) = SR(A)$
$\dim V < \infty \implies$ der kanonische Homomorphismus $\iota : V \to V^{**}$ ist ein Isomorphismus	$\dim V < \infty \implies$ l'homorphisme canonique $\iota : V \to V^{**}$ est un isomorphisme
Für einen endlich dimensionalen euklischen Vektorraum V ist $\Psi : V \to V^*$, $v \mapsto \langle \cdot, v\rangle$ ein Isomorphismus, $\Psi(U^\perp) = U^0$	Pour un espace euclidien V de dimension finie l'homomorphisme $\Psi : V \to V^*$, $v \mapsto \langle \cdot, v\rangle$ est un isomorphisme, $\Psi(U^\perp) = U^0$
Transformationsformel für eine Bilinerform unter Basiswechsel	formule de transformation pour la forme bilinéaire sur un changement de base
Hauptachsentransformation	transformation aux axes principaux
Polarisation	polarisation
quadratische Formen ohne gemischte Terme	réduction des formes quadratiques