

**Masterarbeit FS 2016**  
**Toruswirkungen auf symplektischen**  
**Mannigfaltigkeiten**

Adrian Müller

7. Juli 2016

**Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Symplektische lineare Algebra</b>	<b>4</b>
2.1	Symplektische Vektorräume . . . . .	4
2.2	Die symplektische lineare Gruppe . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Komplexe Strukturen</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Symplektische Mannigfaltigkeiten</b>	<b>11</b>
4.1	Grundbegriffe . . . . .	11
4.2	Hamiltonsche Flüsse . . . . .	13
4.3	Fast komplexe Strukturen . . . . .	14
4.4	Hamiltonsche Aktionen . . . . .	15
4.5	Morse Theorie . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Theorem von Atiyah-Guillemin-Sternberg</b>	<b>21</b>
5.1	Konvexitätssatz . . . . .	22
5.2	Vorbereitende Lemmata . . . . .	24
5.3	Beweis des Theorems . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Anwendung</b>	<b>31</b>
6.1	Koadjungierte Aktion . . . . .	31
6.2	Theorem von Schur-Horn . . . . .	32
<b>7</b>	<b>Dank</b>	<b>34</b>

**Abbildungsverzeichnis**

1	Kreiswirkung auf $S^2$ . . . . .	16
2	$C_0$ ist zusammenhängend. . . . .	20
3	Konvexe Hülle der Toruswirkung auf $CP^2$ . . . . .	24

## 1 Einleitung

In dieser Masterarbeit werden Toruswirkungen auf symplektischen Mannigfaltigkeiten thematisiert. Zentral wird dabei das Theorem von Atiyah-Guillemin-Sternberg sein, welches Informationen gibt über das Bild von reellwertigen Funktionen  $f_1, \dots, f_n$ , die eine Torusaktion auf einer kompakten, zusammenhängenden, symplektischen Mannigfaltigkeit  $M$  erzeugen. Die Niveaumengen der Funktion  $f = (f_1, \dots, f_n)$  sind entweder leer oder zusammenhängend und das Bild der Funktion  $f(M)$  ist die konvexe Hülle der Punkte  $c_1, \dots, c_n$ . Diese Punkte sind die Werte von  $f$  auf den zusammenhängenden Komponenten  $C_1, \dots, C_n$  der Menge der gemeinsamen kritischen Punkte  $C$  der Funktionen  $f_1, \dots, f_n$ .

Um symplektische Mannigfaltigkeiten näher beschreiben zu können, ist es wichtig zuerst die Grundbegriffe aus der linearen symplektischen Algebra zu erklären. Deshalb wird zu Beginn der Arbeit die schiefsymmetrische Bilinearform  $\omega$  betrachtet und es wird gezeigt, dass symplektische Vektorräume der gleichen Dimension isomorph zueinander sind. Ebenso werden die Vektorraumisomorphismen betrachtet, welche die Bilinearform  $\omega$  erhalten.

Anschliessend folgt ein Kapitel über komplexe Strukturen auf einem Vektorraum  $V$ . Solche Strukturen ermöglichen es,  $V$  als komplexen Vektorraum anzusehen. Besonders interessant ist es, wenn solche Strukturen kompatibel mit der Bilinearform  $\omega$  sind, denn dann kann ein inneres Produkt auf dem Vektorraum  $V$  definiert werden.

Eine symplektische Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer nicht entarteten, geschlossenen 2-Form  $\omega$ , sodass jeder Tangentialraum zu einem symplektischen Vektorraum wird. Die komplexe Struktur auf dem Tangentialbündel  $TM$ , die Riemannsche Metrik und die symplektische Struktur  $\omega$  können miteinander in Verbindung gebracht werden. Es wird gezeigt, dass es für jede nicht entartete 2-Form  $\omega$  eine komplexe Struktur auf  $TM$  gibt, die kompatibel mit  $\omega$  ist.

Mithilfe der symplektischen Struktur kann ein Hamiltonsches Vektorfeld für eine reellwertige Abbildung auf der Mannigfaltigkeit  $M$  definiert werden. Eine Aktion einer kompakten Lie-Gruppe  $G$  auf der Mannigfaltigkeit  $M$  ist Hamiltonsch, wenn in bestimmter Art und Weise jedem Element aus der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  eine Funktion  $H$  zugeordnet werden kann, die von einem Hamiltonschen Vektorfeld stammt. Zur Illustration folgen Beispiele einer Kreiswirkung und einer Toruswirkung. Des Weiteren wird in der Arbeit gezeigt, dass die Fixpunkte der Gruppenaktion den kritischen Punkten einer Abbildung entsprechen, die mit der Hamiltonschen Aktion im Zusammenhang steht.

Nach einem Exkurs in die Morse Theorie und vier vorbereitenden Lemmata folgt der Beweis des Theorems von Atiyah-Guillemin-Sternberg. Dabei wird mehrheitlich dem Beweisablauf von McDuff und Salamon ([9, p. 185 - 191]) gefolgt. Zum Schluss der Arbeit folgt eine Anwendung, denn wie

Atiyah einleitend in seiner Arbeit ([1, p. 1]) erwähnt hat, ist das Theorem von Atiyah-Guillemin-Sternberg eine Generalisierung eines Resultats von Schur und Horn im Kontext der symplektischen Geometrie. Zentral für die vorliegende Arbeit ist das Paper von Atiyah ([1]). Für die theoretischen Grundlagen wurde auf das Buch von McDuff und Salamon ([9]) sowie auf das Buch von Audin ([2]) zurückgegriffen.

Das beschriebene Konvexitätstheorem ist grundlegend für die Klassifikation von torischen Varietäten. Das Theorem von Delzant ([6]) besagt, dass das Bild der Abbildung  $f(M)$  - gemäss des Konvexitätstheorems ein Polytop in  $\mathbb{R}^n$  - die Mannigfaltigkeit bis auf Diffeomorphie bestimmt. Somit ist das Theorem von Atiyah-Guillemin-Sternberg der Grundstein für diese Verknüpfung der Kombinatorik mit der Differentialgeometrie.

## 2 Symplektische lineare Algebra

### 2.1 Symplektische Vektorräume

**Definition 2.1.** Ein **symplektischer Vektorraum** ist ein Paar  $(V, \omega)$ , wobei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $\omega$  eine nicht entartete, schiefsymmetrische Bilinearform ist. Es gibt also für alle Vektoren  $v, w \in V$  eine Abbildung  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\omega(v, w) = -\omega(w, v)$$

und für alle  $v \in V$  gilt

$$\omega(v, w) = 0 \quad \forall w \in V \Rightarrow v = 0. \quad (1)$$

#### Beispiele 2.2.

1. Ist  $V$  ein reeller,  $n$ -dimensionaler Vektorraum mit Dualraum  $V^*$ , dann definiert  $\omega'$  eine nicht entartete, schiefsymmetrische Bilinearform auf  $W := V \times V^*$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \omega' : W \times W &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega'((v, f), (w, g)) &= f(w) - g(v). \end{aligned}$$

Somit ist  $W$  ein  $2n$ -dimensionaler, symplektischer Vektorraum.

2. Auf  $V = \mathbb{R}^{2n}$  ist die Linearform  $dz_j \in (\mathbb{R}^{2n})^*$  definiert als

$$dz_j(a) := e_j^*(a) = a_j$$

für alle  $a = (a_1, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ . Mit der schiefsymmetrischen Bilinearform

$$dz_i \wedge dz_j(a, b) := \det \begin{pmatrix} dz_i(a) & dz_i(b) \\ dz_j(a) & dz_j(b) \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i$$

lässt sich die Standardstruktur  $\omega_0$  auf  $\mathbb{R}^{2n}$  als Differentialform darstellen. Für  $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  und  $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$  ist

$$\omega_0(u, v) = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k(u, v) = \sum_{k=1}^n u_k v_{n+k} - u_{n+k} v_k.$$

**Bemerkung 2.3.** Äquivalent zur Bedingung (1) folgt, dass es einen Vektorraumisomorphismus von  $V$  nach  $V^*$  gibt:

$$\begin{aligned} \iota_\omega : V &\rightarrow V^* \\ v &\mapsto \iota_\omega(v) = \omega(v, \cdot). \end{aligned}$$

**Definition 2.4.** Ein Untervektorraum  $W \subset V$  ist ein **symplektischer Unterraum**, wenn

$$W \cap W^\omega = \{0\}, \quad (2)$$

wobei  $W^\omega = \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0 \ \forall w \in W\}$  das symplektische Komplement von  $W$  darstellt.

**Bemerkung 2.5.** Im Allgemeinen erfüllt ein symplektisches Komplement  $W^\omega$  die Gleichung (2) nicht. Der Raum  $W$  kann ebenso isotropisch ( $W \subset W^\omega$ ), koisotropisch ( $W^\omega \subset W$ ) oder ein Lagrange-Unterraum ( $W = W^\omega$ ) sein. Es kann gezeigt werden, dass  $W$  genau dann ein symplektischer Unterraum ist, wenn  $\omega|_W$  eine nicht entartete Form auf  $W$  ist. Daraus folgt, dass der symplektische Unterraum  $W$  ein symplektischer Untervektorraum in  $V$  ist.

**Definition 2.6.** Ein **linearer Symplektomorphismus** auf  $(V, \omega)$  ist ein Vektorraumisomorphismus  $\psi : V \rightarrow V$ , welcher die nicht entartete, schiefsymmetrische Bilinearform erhält, i.e.  $\psi^*\omega = \omega$ , bzw.

$$\psi^*\omega(v, w) = \omega(\psi(v), \psi(w)) = \omega(v, w) \quad \forall v, w \in V.$$

**Bemerkung 2.7.** Die linearen Symplektomorphismen auf  $(V, \omega)$  bilden eine Gruppe, die mit  $\text{Sp}(V, \omega)$  benannt wird. Wenn  $V = \mathbb{R}^{2n}$  ist, so wird abgekürzt zu  $\text{Sp}(2n) = \text{Sp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ .

**Theorem 2.8.** Sei  $(V, \omega)$  ein symplektischer Vektorraum der Dimension  $2n$ . Es existiert eine Basis  $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ , sodass

$$\omega(u_j, u_k) = \omega(v_j, v_k) = 0 \quad \text{und} \quad \omega(u_j, v_k) = \delta_{jk}$$

für alle  $1 \leq j, k \leq n$ . Eine solche Basis ist eine symplektische Basis. Es existiert ebenso ein Vektorraumisomorphismus  $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V$ , sodass  $\psi^*\omega = \omega_0$  gilt.

*Beweis.* Sei  $u_1 \neq 0 \in V$ . Da  $\omega$  nicht entartet ist, existiert ein Vektor  $u' \in V$  mit  $\omega(u_1, u') \neq 0$ . Durch Normalisieren mit  $v_1 = \omega(u_1, u')^{-1}u'$  folgt  $\omega(u_1, v_1) = 1$ . Da  $\omega$  schiefsymmetrisch ist, sind die beiden Vektoren  $u_1$  und  $v_1$  linear unabhängig. Der Unterraum  $E = \text{span}(u_1, v_1)$  ist ein symplektischer Unterraum von  $V$  mit Dimension 2. Wenn der Vektorraum  $V$  Dimension 2 hat, dann ist die gesuchte Basis gefunden. Wenn die Dimension von  $V$  grösser als zwei ist, dann wird das symplektische Komplement  $E^\omega$  betrachtet. Mit demselben Argument folgt nun in endlich vielen Schritten, dass die gesuchte Basis existiert. Es kann kein eindimensionaler Unterraum übrig bleiben, da  $\omega(v, \lambda v) = 0$  aus der Definition von  $\omega$  folgt. Demnach können symplektische Vektorräume nicht von ungerader Dimension sein. Die lineare Abbildung  $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V$  definiert durch

$$\psi z = \sum_{j=1}^n (x_j u_j + y_j v_j)$$

ist der gesuchte Isomorphismus, wobei  $z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  ein Element von  $\mathbb{R}^{2n}$  ist.  $\square$

**Korollar 2.9.** Sei  $V$  ein  $2n$ -dimensionaler, reeller Vektorraum. Die schiefsymmetrische Bilinearform  $\omega$  auf  $V$  ist genau dann nicht entartet, wenn das  $n$ -fache äussere Produkt ungleich null ist, i.e.  $\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega \neq 0$ .

*Beweis.* Um zu zeigen, dass ein  $n$ -faches äusseres Produkt, welches nicht null ist, eine schiefsymmetrische Bilinearform impliziert, wird gezeigt, dass wenn  $\omega$  entartet ist, ist  $\omega^n = 0$ . Da  $\omega$  entartet ist, existiert ein Vektor  $v \neq 0$  mit  $\omega(v, w) = 0$  für alle  $w \in V$ . Es kann eine Basis  $v, v_2, \dots, v_{2n}$  von  $V$  gewählt werden mit der Eigenschaft  $\omega^n(v, v_2, \dots, v_{2n}) = 0$ .

Sei nun  $\omega$  nicht entartet. Da  $\omega_0^n$  eine Volumenform ist, folgt mit Theorem 2.8, dass  $\psi^* \omega^n = \omega_0^n$  ungleich null ist, dann und nur dann, wenn  $\omega^n$  ungleich null ist, da  $\psi^*$  der Pullback des Symplektomorphismus  $\psi$  ist.  $\square$

## 2.2 Die symplektische lineare Gruppe

Wegen des Theorems 2.8 sind nun alle symplektischen Vektorräume derselben Dimension isomorph zueinander. Häufig reicht es deshalb aus, den Standardfall  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  mit dem Standardskalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  zu berücksichtigen. Die Elemente in  $\text{Sp}(2n)$  sind reelle  $2n \times 2n$  Matrizen  $A$ , für die gilt:

$$A^T J_0 A = J_0. \quad (3)$$

Hierbei ist  $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$ . Aus der Gleichung (3) für  $\psi \in \text{Sp}(2n)$  folgt:

$$\omega_0(u, v) = \langle J_0 u, v \rangle = -u^T J_0 v = -u^T \psi^T J_0 \psi v = \langle J_0 \psi u, \psi v \rangle = \omega_0(\psi u, \psi v),$$

also gilt  $\psi^*\omega_0 = \omega_0$ . Umgekehrt lässt sich zeigen, dass Folgendes gilt:

$$-u^T \psi^T J_0 \psi v = \langle J_0 \psi u, \psi v \rangle = \omega_0(\psi v, \psi u) = \omega_0(u, v) = \langle J_0 u, v \rangle = -u^T J_0 v.$$

Also ist die Gleichung (3) äquivalent zu der Bedingung  $\psi^*\omega_0 = \omega_0$ .

**Bemerkung 2.10.** Indem  $\mathbb{R}^{2n}$  mit  $\mathbb{C}^n$  identifiziert wird, entspricht die Multiplikation mit  $J_0$  in  $\mathbb{R}^{2n}$  der Multiplikation mit  $i$  in  $\mathbb{C}^n$ . Damit ist  $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$  eine Untergruppe in  $\mathrm{GL}(2n; \mathbb{R})$  und ebenso ist  $U(n)$  eine Untergruppe in  $\mathrm{Sp}(2n)$ .

**Lemma 2.11.** Es gilt folgende Gleichheit:

$$\mathrm{Sp}(2n) \cap O(2n) = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{GL}(n; \mathbb{C}) = O(2n) \cap \mathrm{GL}(n; \mathbb{C}) = U(n).$$

*Beweis.* Für eine reelle  $2n \times 2n$  Matrix  $A$  gilt:

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{C}) &\Leftrightarrow AJ_0 = J_0A \\ A \in \mathrm{Sp}(2n) &\Leftrightarrow A^T J_0 A = J_0 \\ A \in O(2n) &\Leftrightarrow A^T A = \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Jeweils zwei der drei Bedingungen implizieren die dritte Bedingung, woraus die ersten zwei Gleichheiten folgen. Sei nun  $A = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2n; \mathbb{R})$  mit  $A \in \mathrm{Sp}(2n) \cap O(2n)$ . Es kann nachgerechnet werden, dass  $X^T Y = Y^T X$  und  $X^T X + Y^T Y = \mathbb{1}$  gilt. Das ist genau die Bedingung für  $U = X + iY$  für  $U \in U(n)$ .  $\square$

**Lemma 2.12.** Sei  $A \in \mathrm{Sp}(2n)$ . Wenn  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$  ist, dann ist auch  $\lambda^{-1}$  ein Eigenwert von  $A$ . Die beiden Eigenwerte haben dieselbe Multiplizität. Zudem gilt für  $Az = \lambda z$ ,  $Az' = \lambda' z'$  und  $\lambda \lambda' \neq 1$ :  $\omega_0(z, z') = 0$ .

*Beweis.* Da  $A^T = J_0 A^{-1} J_0^{-1}$  gilt, ist  $A^T$  ähnlich zu  $A^{-1}$  und somit folgt die erste Aussage. Die Multiplizität aller Eigenwerte ungleich  $\pm 1$  ist darum gerade. Da die Determinante das Produkt aller Eigenwerte ist und für symplektische Matrizen  $A \in \mathrm{Sp}(2n)$  die Determinante gleich 1 ist (vgl. [9, p. 21]), folgt, dass der Eigenwert  $-1$  mit gerader Multiplizität auftritt. Der Eigenwert 1 tritt ebenfalls mit gerader Multiplizität auf, da eine Matrix  $A \in \mathrm{Sp}(2n)$  eine gerade Anzahl von Eigenwerten hat. Es gilt zudem

$$\lambda \lambda' \omega_0(z, z') = \lambda \lambda' \langle z', J_0 z \rangle = \langle Az', J_0 Az \rangle = \langle z', J_0 z \rangle = \omega_0(z, z')$$

und da  $\lambda \lambda' \neq 1$  ist, folgt die letzte Aussage des Lemmas.  $\square$

**Lemma 2.13.** Wenn  $P = P^T \in \mathrm{Sp}(2n)$  eine symmetrische, positiv definite Matrix ist, dann ist  $P^\alpha \in \mathrm{Sp}(2n)$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ .

*Beweis.* Zuerst kann bemerkt werden, dass symmetrische positiv definite Matrizen diagonalisierbar sind mit Eigenwerten grösser als null. Deshalb kann für  $P = S^{-1}DS$  die Matrix  $P^\alpha$  für  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$  definiert werden:

$$P^\alpha := S^{-1}D^\alpha S,$$

wobei  $D^\alpha$  die Diagonalmatrix ist mit Einträgen  $d_{ii}^\alpha$  für  $i = 1, \dots, 2n$ . Es wird nun gezeigt, dass  $P^\alpha$  die symplektische Form  $\omega_0$  erhält, i.e.

$$\omega_0(P^\alpha z, P^\alpha z') = \omega_0(z, z') \quad \forall z, z' \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (4)$$

Unterteile  $\mathbb{R}^{2n}$  in eine direkte Summe von Eigenräumen  $V_\lambda$ , wobei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $P$  ist. Der Raum  $V_\lambda$  ist dann Eigenraum von  $P^\alpha$  bezüglich  $\lambda^\alpha$ , da für  $P = S^{-1}DS$  folgt

$$S^{-1}DSv = \lambda v \Leftrightarrow D(Sv) = \lambda Sv \Leftrightarrow D^\alpha(Sv) = \lambda^\alpha Sv \Leftrightarrow P^\alpha v = \lambda^\alpha v.$$

Lemma 2.12 besagt, dass für  $\lambda\lambda' \neq 1$  die beiden Eigenräume  $V_\lambda$  und  $V_{\lambda'}$  bezüglich  $\omega_0$  orthogonal zueinander sind. Also verschwindet  $\omega_0$  auf  $V_\lambda$  für  $\lambda \neq \pm 1$ . Für  $z \in V_\lambda$  und  $z' \in V_{\lambda'}$  und  $\lambda\lambda' = 1$  folgt:

$$\omega_0(P^\alpha z, P^\alpha z') = (\lambda\lambda')^\alpha \omega_0(z, z') = \omega_0(z, z').$$

Da jeder Vektor in  $\mathbb{R}^{2n}$  eine Summe von Eigenvektoren von  $P$  ist, folgt daraus die Gleichung (4).  $\square$

### 3 Komplexe Strukturen

**Definition 3.1.** Eine **komplexe Struktur** auf einem Vektorraum  $V$  ist ein Automorphismus  $J : V \rightarrow V$  mit  $J^2 = -\mathbb{1}$ . Der Raum der komplexen Strukturen auf  $V$  wird als  $\mathcal{J}(V)$  bezeichnet.

**Beispiel 3.2.** Das Standardbeispiel für eine komplexe Struktur auf  $\mathbb{R}^{2n}$  ist

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Isomorphismus  $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $(x, y) \mapsto x + iy$  entspricht  $J_0$  der Multiplikation mit  $i$ . Das folgende Lemma zeigt die Verbindung zwischen einer beliebigen komplexen Struktur und der Standardstruktur.

**Lemma 3.3.** Sei  $V$  ein  $2n$ -dimensionaler, reeller Vektorraum und  $J \in \mathcal{J}(V)$ . Es existiert ein Vektorraumisomorphismus  $\phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V$ , sodass  $J\phi = \phi J_0$ .

*Beweis.* Sei  $V^c$  die Komplexifizierung von  $V$  und seien  $E^\pm = \ker(\mathbb{1} \pm iJ)$  Eigenräume von  $J$ . Dann folgt, dass  $V^c = E^+ \oplus E^-$  ist, also ist  $n$  die Dimension von  $E^\pm$ . Es kann eine Basis  $w_k = u_k + iv_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  von  $E^+$

gewählt werden, sodass die Vektoren  $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  bilden. Für die Abbildung  $J$  gilt  $Ju_j = -v_j$  und  $Jv_j = u_j$ , da für  $w \in E^+$ ,  $w = \sum_{s=1}^n u_s + iv_s$  Folgendes nachgerechnet werden kann:

$$\begin{aligned} Jw &= J\left(\sum_{s=1}^n u_s + iv_s\right) = \sum_{s=1}^n Ju_s + iJv_s \\ Jw &= iw = \sum_{s=1}^n -v_s + iu_s. \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V$  ist für  $\xi = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= \sum_{s=1}^n (\lambda_s u_s - \lambda'_s v_s) \\ J\phi(\xi) &= J\left(\sum_{s=1}^n \lambda_s u_s - \lambda'_s v_s\right) = \sum_{s=1}^n -\lambda_s v_s - \lambda'_s u_s \\ \phi J_0(\xi) &= \phi(-\lambda'_1, \dots, -\lambda'_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{s=1}^n -\lambda_s v_s - \lambda'_s u_s. \end{aligned}$$

□

**Definition 3.4.** Sei  $(V, \omega)$  ein symplektischer Vektorraum. Eine **komplexe Struktur**  $J \in \mathcal{J}(V)$  ist **kompatibel** mit  $\omega$  wenn Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \omega(Jv, Jw) &= \omega(v, w) & \forall v, w \in V \\ \omega(v, Jv) &> 0 & \forall v \in V, v \neq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Der Raum der kompatiblen komplexen Strukturen auf  $(V, \omega)$  wird als  $\mathcal{J}(V, \omega)$  bezeichnet und der Raum der inneren Produkte auf  $V$  wird als  $\mathfrak{Met}(V)$  beschrieben.

**Bemerkung 3.5.** Wenn  $J$  eine kompatible komplexe Struktur ist, dann definiert  $\omega(v, Jw) =: g_J(v, w)$  ein inneres Produkt auf  $V$ .

**Proposition 3.6.** Die komplexe Struktur  $J$  ist genau dann kompatibel mit  $\omega$ , wenn die Bilinearform  $g_J : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrisch, positiv definit und  $J$ -invariant ist.

*Beweis.* Die Bilinearform  $g_J$  ist symmetrisch, da Folgendes gilt:

$$g_J(v, w) = \omega(v, Jw) = \omega(Jv, -w) = -\omega(-w, Jv) = \omega(w, Jv) = g_J(w, v).$$

'Positiv definit' folgt aus der Kompatibilitätsbedingung (5) und die Invarianz folgt aus dieser Gleichung:

$$g_J(Jv, Jw) = \omega(Jv, -w) = \omega(-v, -Jw) = \omega(v, Jw) = g_J(v, w).$$

Die Kompatibilität von  $\omega$  mit  $J$  folgt einerseits daraus, dass  $g_J$  positiv definit ist und andererseits aus der folgenden Gleichung:

$$\omega(Jv, Jw) = g_J(Jv, w) = g_J(-v, Jw) = g_J(v, -Jw) = \omega(v, w).$$

□

**Lemma 3.7.**

- a) Der Raum  $\mathcal{J}(V, \omega)$  ist homöomorph zum Raum der positiv definiten, symmetrischen, symplektischen Matrizen  $\mathcal{P}$ .
- b) Es existiert eine stetige Abbildung  $r : \mathfrak{Met}(V) \rightarrow \mathcal{J}(V, \omega)$  mit

$$r(g_J) = J \quad \text{und} \quad r(\phi^*g) = \phi^*r(g)$$

für alle  $J \in \mathcal{J}(V, \omega)$ ,  $g \in \mathfrak{Met}(V)$  und  $\phi \in \text{Sp}(V, \omega)$ .

*Beweis.*

- a) Wegen Theorem 2.8 kann  $V = \mathbb{R}^{2n}$  und  $\omega = \omega_0$  angenommen werden. Eine Matrix  $J$  ist eine kompatible komplexe Struktur, dann und nur dann, wenn  $J^2 = -\mathbb{1}$ ,  $J^T J_0 J = J_0$  und  $\langle v, -J_0 J v \rangle > 0$  für alle  $v \neq 0$  gilt. Es folgt für eine kompatible komplexe Struktur  $J$ :

$$(J_0 J)^T = -J^T J_0 = J^T J_0 J^2 = J_0 J.$$

Also ist  $-J_0 J = A$  symmetrisch, positiv definit und symplektisch. Wenn nun eine Matrix  $A$  diese Eigenschaft hat, so ist  $J = -J_0^{-1} A$  eine kompatible komplexe Struktur auf  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ .

- b) Sei nun die Abbildung  $r$  folgendermassen definiert: Für  $g \in \mathfrak{Met}(V)$  sei  $A \in \text{Aut}(V)$  mit  $\omega(v, w) = g(Av, w)$ . Somit gilt  $g(Av, w) = -g(v, Aw)$ , also ist  $A$   $g$ -schiefadjungiert. Sei  $A^*$   $g$ -adjungiert zu  $A$ , i.e.  $g(A^*v, w) = g(v, Aw)$ . Es gilt nun, dass  $P = A^*A = -A^2$   $g$ -positiv definit ist:

$$g(Pv, v) = g(A^*Av, v) = g(Av, Av) > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

Sei nun  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  die Abbildung mit  $\Psi^*\omega_0 = \omega$ . Die Matrix  $\Psi A \Psi^{-1} \in \text{GL}(n; \mathbb{C})$  kommutiert mit  $J_0$ . Deshalb gilt für den Automorphismus  $Q := -\Psi^{-1} J_0 \Psi A$  folgende Gleichung:

$$Q^2 = \Psi^{-1} J_0 \Psi A \Psi^{-1} J_0 \Psi A = \Psi^{-1} J_0 J_0 \Psi A \Psi^{-1} \Psi A = -A^2 = P.$$

Es kann - unter Berücksichtigung, dass  $g(Qv, w) = \omega(A^{-1}Qv, w)$  gilt, die Matrizen  $\Psi A^{-1} \Psi^{-1}$  und  $J_0$  kommutieren und  $A$   $g$ -schiefadjungiert ist - nachgerechnet werden, dass der Automorphismus  $Q : V \rightarrow V$   $g$ -selbstadjungiert und  $g$ -positiv definit ist.

Der Automorphismus  $J_g = Q^{-1}A$  ist nun eine komplexe Struktur, was aus der nächsten Gleichung folgt:

$$J_g^2 = (\Psi A)^{-1} J_0^2 (\Psi A) = -\mathbb{1}.$$

Diese komplexe Struktur ist ebenfalls kompatibel mit  $\omega$ , was aus den folgenden Gleichungen ersichtlich wird:

$$\begin{aligned} \omega(J_g v, J_g w) &= \omega(Q^{-1}Av, Q^{-1}Aw) = g(AQ^{-1}Av, Q^{-1}Aw) \\ &= g(Q^{-1}AQ^{-1}Av, Aw) = g(-v, Aw) \\ &= g(Av, w) = \omega(v, w). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(v, J_g v) &= g(Av, Q^{-1}Av) = -g(AQ^{-1}Av, v) \\ &= -g(Q^{-1}AQ^{-1}Av, Qv) = g(v, Qv) > 0. \end{aligned}$$

Definiere nun  $r(g) = J_g$ . Die Abbildung  $r$  ist eine stetige Funktion von  $\mathfrak{Met}(V)$  in die kompatiblen komplexen Strukturen  $\mathcal{J}(V, \omega)$  (vgl. [9, p. 67]). Wenn  $g \in \mathfrak{Met}(V)$  von der Form  $g_J$  ist, dann ist  $A = J$  und  $Q = \mathbb{1}$ , also ist  $r(g_J) = J$ . Wenn  $g$  ersetzt wird durch  $\phi^*g(v, w) = g(\phi(v), \phi(w))$  für  $\phi \in \text{Sp}(V, \omega)$ , dann wird  $A$  ersetzt durch  $\phi^{-1}A\phi$  und somit ist  $J_{\phi^*g} = \phi^{-1}J_g\phi$ .

□

## 4 Symplektische Mannigfaltigkeiten

Sei von nun an  $M$  eine  $C^\infty$ -differenzierbare, reelle,  $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand.

### 4.1 Grundbegriffe

**Definition 4.1.** Eine **symplektische Struktur** auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine nicht entartete, geschlossene 2-Form  $\omega \in \Omega^2(M)$ . Es gelten also folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} \omega(p, q) &= 0 \quad \forall q \in T_x M \Rightarrow p = 0 \quad \forall x \in M \\ d\omega &= 0. \end{aligned}$$

Eine **symplektische Mannigfaltigkeit** ist ein Paar  $(M, \omega)$  bestehend aus einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  und einer symplektischen Struktur  $\omega$ .

**Beispiel 4.2.** Das Standardbeispiel einer symplektischen Mannigfaltigkeit ist  $M = \mathbb{R}^{2n}$  mit der Standardstruktur  $\omega_0 = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j$ , wobei  $z \in \mathbb{R}$  als

$z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  geschrieben wird. Für Tangentialvektoren  $u$  und  $v$  in  $T_z M$  gilt also Folgendes:

$$\omega_0(u, v) = \sum_{j=1}^n u_j v_{j+n} - v_j u_{j+n}.$$

### Bemerkungen 4.3.

- Aus der Bedingung, dass  $\omega$  eine nicht entartete Form ist, folgt ähnlich wie in Bemerkung 2.3, dass es einen Isomorphismus  $\iota(\cdot)\omega$  gibt vom Raum Vektorfeldern zu den 1-Formen auf  $M$ :

$$\begin{aligned} \iota(\cdot)\omega : \mathcal{X}(M) &\rightarrow \Omega^1(M) \\ X &\mapsto \iota(X)\omega = \omega(X, \cdot). \end{aligned}$$

- Aus der Bedingung, dass  $\omega$  nicht entartet ist, wird jeder Tangentialraum  $(T_p M, \omega_p)$  zu einem symplektischen Vektorraum. Es folgt ebenso, dass eine symplektische Mannigfaltigkeit von gerader Dimension sein muss.
- Mit Lemma 2.9 folgt, dass das äussere Produkt  $\omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega$  ungleich null ist, also dass eine symplektische Mannigfaltigkeit eine orientierbare Mannigfaltigkeit ist. Diese Eigenschaft wird von Atiyah zum Beweis des Lemmas 4.26 benutzt (vgl. [1, p. 4f]). Das Lemma wird hier jedoch ohne Gebrauch dieser Eigenschaft bewiesen.

**Definition 4.4.** Ein **Symplektomorphismus** auf  $(M, \omega)$  ist eine Abbildung  $\Psi \in \text{Diff}(M)$  mit  $\Psi^*\omega = \omega$ . Die Menge aller Symplektomorphismen  $\text{Symp}(M, \omega)$  bildet eine Gruppe.

**Definition 4.5.** Ein Vektorfeld  $X \in \mathcal{X}(M)$  ist ein **symplektisches Vektorfeld**, wenn  $\iota(X)\omega$  geschlossen ist. Der Raum der symplektischen Vektorfelder wird als  $\mathcal{X}(M, \omega)$  beschrieben.

**Bemerkung 4.6.** Es gibt verschiedene Vorzeichenkonventionen für die Lie-Ableitung von Formen, hier wird wie in [9, p. 84] definiert:

$$[X, Y] = -\mathcal{L}_X(Y) = -\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* Y,$$

wobei  $\varphi_t$  der Fluss von  $X$  und  $\varphi^* Y(p) = d\varphi^{-1}(p)Y(\varphi(p))$  der Pullback des Vektorfeldes  $Y$  unter  $\varphi$  ist.

**Proposition 4.7.** Wenn  $t \mapsto \Psi_t \in \text{Diff}(M)$  eine differenzierbare Familie von Diffeomorphismen ist, welche erzeugt wird durch eine Familie von Vektorfeldern  $X_t \in \mathcal{X}(M)$  mit

$$\frac{d}{dt} \Psi_t = X_t \circ \Psi_t, \quad \Psi_0 = \text{id},$$

dann ist  $\Psi_t$  ein Element von  $\text{Symp}(M, \omega)$  für alle  $t$  dann und nur dann, wenn  $X_t$  ein Element von  $\mathcal{X}(M, \omega)$  ist für alle  $t$ . Ebenso gilt die Gleichung  $\iota([X, Y])\omega = dH$ , wobei  $H = \omega(X, Y)$  ist.

*Beweis.* Die Lie-Ableitung für Formen wird mit der Formel von Cartan zu

$$\mathcal{L}_X \omega = \iota(X)d\omega + d(\iota(X)\omega).$$

Da  $\omega$  geschlossen ist, gilt

$$\frac{d}{dt} \Psi_t^* \omega = \Psi_t^* (\iota(X_t)d\omega + d(\iota(X_t)\omega)) = \Psi_t^* d(\iota(X_t)\omega).$$

Hiermit gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \Psi_t^* \omega = \omega &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \Psi_t^* \omega = 0 \\ &\Leftrightarrow \Psi_t^* d(\iota(X_t)\omega) = 0 \\ &\Leftrightarrow d(\iota(X_t)\omega) = 0 \\ &\Leftrightarrow X_t \in \mathcal{X}(M, \omega). \end{aligned}$$

Für  $X, Y \in \mathcal{X}(M, \omega)$  und die entsprechenden Flüsse  $\phi_t, \psi_t$  gilt:

$$[X, Y] = -[Y, X] = \mathcal{L}_Y X = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_t^* X.$$

Da  $\psi_t \in \text{Symp}(M, \omega)$  ist  $\psi_t^* \omega = \omega$ . Daraus folgt die Gleichung  $\iota(\psi_t^* X)\omega = \psi_t^* (\iota(X)\omega)$ . Es gilt also unter Berücksichtigung der Cartanformel und dass  $X$  ein symplektisches Vektorfeld ist, dass

$$\iota([X, Y])\omega = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \iota(\psi_t^* X)\omega = \mathcal{L}_Y (\iota(X)\omega) = d(\iota(Y)\iota(X)\omega) = d(\omega(X, Y)).$$

□

## 4.2 Hamiltonsche Flüsse

**Definition 4.8.** Sei  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Das Vektorfeld  $X_H : M \rightarrow TM$  ist bestimmt durch  $\iota(X_H)\omega = dH$  und wird **Hamiltonsches Vektorfeld** bezüglich  $H$  genannt. Die Funktion  $H$  wird als **Hamiltonsche Funktion** bezeichnet.

**Definition 4.9.** Wenn  $M$  geschlossen ist, erzeugt das Vektorfeld  $X_H$  bezüglich einer Hamiltonschen Funktion  $H$  eine differenzierbare 1-Parametergruppe von Diffeomorphismen  $\varphi_H^t \in \text{Diff}(M)$  mit

$$\frac{d}{dt} \varphi_H^t = X_H \circ \varphi_H^t \quad \text{und} \quad \varphi_H^0 = \text{id}.$$

Diese Abbildung  $\varphi_H^t$  ist der **Hamiltonsche Fluss** bezüglich  $H$ .

**Bemerkungen 4.10.**

- Das Hamiltonsche Vektorfeld  $X_H$  ist tangential an die Niveaumengen von  $H$  aufgrund folgender Gleichung:

$$dH(X_H) = \iota(X_H)\omega(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0.$$

- Das Hamiltonsche Vektorfeld  $X_H$  ist ein symplektisches Vektorfeld, aufgrund der Gleichung  $d\iota(X_H)\omega = d^2H = 0$ .
- Durch Proposition 4.7 folgt, dass der Hamiltonsche Fluss  $\varphi_H^t$  aus Symplektomorphismen besteht.

**4.3 Fast komplexe Strukturen**

**Definition 4.11.** Eine **fast komplexe Struktur** auf  $M$  ist eine komplexe Struktur  $J$  auf dem Tangentialbündel  $TM$ . Die Struktur kann kompatibel mit Formen und Metriken sein:

- Eine nicht entartete 2-Form  $\omega \in \Omega^2(M)$  ist kompatibel mit  $J$ , wenn sie kompatibel ist mit  $J$  als eine schiefsymmetrische Bilinearform auf dem Vektorbündel  $TM$ . In diesem Fall gilt  $\omega(Jv, Jw) = \omega(v, w)$  und  $\langle v, w \rangle := \omega(v, Jw)$  definiert eine Riemannsche Metrik auf  $M$ .
- Eine Riemannsche Metrik  $g(v, w) = \langle v, w \rangle$  ist kompatibel mit  $J$  wenn  $\langle Jv, Jw \rangle = \langle v, w \rangle$  für  $v, w \in T_pM$  gilt. In diesem Fall ist die 2-Form  $\omega(v, w) = \langle Jv, w \rangle$  nicht entartet und kompatibel mit  $J$ . Somit ist das Tripel  $(\omega, J, g)$  kompatibel.

**Proposition 4.12.** Sei  $E \rightarrow M$  ein  $2n$ -dimensionales Vektorbündel. Für jede schiefsymmetrische Bilinearform  $\omega$  auf  $E$  existiert eine fast komplexe Struktur  $J$ , die kompatibel ist mit  $\omega$ .

*Beweis.* Wenn  $M$  aus einem Punkt besteht, dann folgt mit Lemma 3.7 die Aussage. Für den allgemeinen Fall lässt sich ein inneres Produkt auf dem Vektorbündel mittels einer Partition der Eins konstruieren. Mithilfe der Abbildung  $r : \mathfrak{Met}(V) \rightarrow \mathcal{J}(V, \omega)$  aus Lemma 3.7 lässt sich nun eine fast komplexe Struktur auf einer Faser des Bündels  $V = E_p$  herleiten.  $\square$

**Korollar 4.13.** Für jede nicht entartete 2-Form  $\omega$  auf  $M$  existiert eine fast komplexe Struktur  $J$ , die kompatibel ist mit  $\omega$ .

*Beweis.* Auf dem Tangentialbündel  $TM$  existiert eine schiefsymmetrische Bilinearform  $\omega$ , i.e. auf jeder Faser  $T_pM$  gibt es eine schiefsymmetrische Bilinearform  $\omega_p$ , welche differenzierbar vom Punkt  $p \in M$  abhängig ist. Somit folgt mit Proposition 4.12, dass eine fast komplexe Struktur  $J$  existiert, die kompatibel ist mit  $\omega$ .  $\square$

**Bemerkung 4.14.** Aus dem vorherigen Korollar 4.13 folgt, dass wenn eine symplektische Mannigfaltigkeit  $(M, \omega)$  und eine Riemannsche Metrik  $g$  gegeben sind, so existiert eine fast komplexe Struktur  $J_g : TM \rightarrow TM$  mit  $\omega(J_g v, J_g w) = \omega(v, w)$  und  $g(v, w) = \omega(v, J_g w)$ .

#### 4.4 Hamiltonsche Aktionen

Sei  $G$  eine kompakte Lie Gruppe und  $\mathfrak{g}$  die dazugehörige Lie-Algebra, die durch Symplektomorphismen auf  $(M, \omega)$  operiert. Es gibt also einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \text{Symp}(M, \omega) \\ g &\mapsto \psi_g \text{ mit } \psi_{gh} = \psi_g \circ \psi_h \text{ und } \psi_1 = \text{id}_M. \end{aligned}$$

Die infinitesimale Aktion definiert einen Lie-Algebra Homomorphismus,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow \mathcal{X}(M, \omega) \\ \eta &\mapsto X_\eta \text{ mit } X_\eta = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \psi_{\exp(t\eta)}. \end{aligned}$$

Da  $\psi_g \in \text{Symp}(M, \omega)$  gilt, folgt mit Proposition 4.7, dass  $X_\eta$  ein symplektisches Vektorfeld ist. Also ist  $\iota(X_\eta)\omega$  geschlossen für alle  $\eta \in \mathfrak{g}$ .

**Definition 4.15.** Die **Aktion** von  $G$  auf  $M$  ist **Hamiltonsch**, wenn es für jedes  $\eta \in \mathfrak{g}$  eine Abbildung  $H_\eta$  gibt mit  $dH_\eta = \iota(X_\eta)\omega$ , sodass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : \mathfrak{g} &\rightarrow C^\infty(M) \\ \eta &\mapsto \Psi(\eta) = H_\eta \end{aligned} \tag{6}$$

ein Lie-Algebra Homomorphismus bezüglich  $[\cdot, \cdot]$  und der Poisson-Klammer  $\{\cdot, \cdot\}$  auf  $C^\infty(M)$  definiert.

Die Poisson-Klammer zweier Funktionen  $H, K \in C^\infty(M)$  ist wieder eine Funktion in  $C^\infty(M)$  und ist definiert als

$$\{H, K\} = X_H \cdot K = dK(X_H).$$

**Definition 4.16.** Sei eine Hamiltonsche Aktion gegeben. Eine **Momentabbildung** für die Aktion ist eine Abbildung  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ , sodass  $H_\eta(p) = \langle \mu(p), \eta \rangle$  einen Lie-Algebra Homomorphismus  $\Psi$  wie in (6) definiert.

Das heisst, es gibt einen Lie-Algebra Homomorphismus  $\eta \mapsto H_\eta$ , mit  $X_\eta = X_{H_\eta}$  für alle  $\eta \in \mathfrak{g}$ , sodass die Abbildung  $\eta \mapsto H_\eta(p)$  ein lineares Funktional auf  $\mathfrak{g}$  definiert, notiert als  $\mu(p)$ .

**Beispiele 4.17.** Es folgen zwei Beispiele solcher Hamiltonschen Aktionen: Die Operation des Kreises  $S^1$  und eine Torusoperation werden vorgestellt.

1. Es operiere der Kreis  $S^1$  auf  $(M, \omega)$ . Das bedeutet, es gibt für einen Basisvektor  $\eta \in \mathfrak{s}^1$  ein symplektisches Vektorfeld  $X_\eta \in \mathcal{X}(M, \omega)$  und eine Abbildung  $H_\eta : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $dH_\eta = \iota(X_\eta)\omega$ . Indem  $\mathfrak{s}^1$  mit  $\mathbb{R}$  identifiziert wird, folgt für die Momentabbildung  $\mu$  der Aktion, dass  $\mu(p) = H_\eta(p) \cdot \eta^*$ . Also entspricht die Hamiltonsche Funktion  $H_\eta$  der Momentabbildung für die Aktion bis auf einen konstanten Summand. Sei als Beispiel dazu  $H : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Höhenfunktion der Kugel. Die Niveaumengen von  $H$  sind Kreise auf einer konstanten Höhe. Der Hamiltonsche Fluss  $\phi_H^t$  dreht jeden Kreis mit konstanter Geschwindigkeit. Der Fluss  $\phi_H^t$  entspricht einer Rotation der Sphäre entlang der Vertikalachse mit Winkel  $t$ . Die Momentabbildung ist

$$H' : M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2\pi x_3 + \text{const.}$$

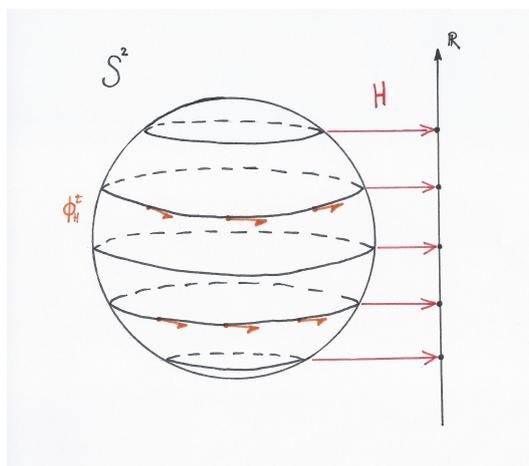


Abbildung 1: Kreiswirkung auf  $S^2$

2. Eine Hamiltonsche Torusaktion ist eine Aktion

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^m &= \mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m \rightarrow \text{Symp}(M, \omega) \\ t &\mapsto \psi_t \end{aligned}$$

auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit  $(M, \omega)$  mit Dimension  $2n$ . Die Lie-Algebra und der Dualraum der Lie-Algebra werden mit  $\mathbb{R}^m$  identifiziert, da  $\mathfrak{t} \cong \mathbb{R}^m$  und  $\mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^m$  gilt. Weil der Torus  $\mathbb{T}^m$  Hamiltonsch auf  $M$  operiert, folgt für die erzeugenden Elemente  $\eta_1, \dots, \eta_m$  der Lie-Algebra  $\mathfrak{t}$ , dass ihre korrespondierenden Hamiltonschen Funktionen  $H_{\eta_1}, \dots, H_{\eta_m}$  in der Poisson-Klammer kommutieren. Die Momentabbildung für die Aktion von  $\mathbb{T}^m$  ist eine Abbildung  $\mu$ , sodass für eine Basis  $\eta_i$  von  $\mathbb{R}^m$  die Abbildung  $\langle \mu(p), \eta_i \rangle = H_{\eta_i}(p)$  die Hamiltonsche Funktion für das Vektorfeld  $X_{\eta_i}$  ist.

**Proposition 4.18.** Für eine Hamiltonsche Torusaktion gilt, dass die kritischen Punkte der Momentabbildung  $\mu$  den Fixpunkten der Aktion  $\psi_g^{H_{\eta_i}}$  entsprechen.

*Beweis.* Für die kritischen Punkte von  $\langle \mu(p), \eta_i \rangle = H_{\eta_i}(p)$  gilt:

$$dH_{\eta_i}(p) = 0 \Leftrightarrow \iota(X_{H_{\eta_i}})\omega(p) = 0 \Leftrightarrow X_{H_{\eta_i}}(p) = 0.$$

Sei  $\alpha_p$  die Integralkurve zum Vektorfeld  $X_{H_{\eta_i}}$ , i.e.  $\alpha_p'(t) = X_{H_{\eta_i}}(\alpha_p(t))$  und  $\alpha_p(0) = p$ . Mit  $\psi_g^{H_{\eta_i}}$ , dem Hamiltonschen Fluss bezüglich  $X_{H_{\eta_i}}$  folgt:

$$\alpha_p'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha_p(t) = p \forall t \Leftrightarrow \psi_g^{H_{\eta_i}}(p) = p \forall g \in G.$$

□

#### 4.5 Morse Theorie

Um das Theorem von Atiyah-Guillemin-Sternberg zu beweisen sind einige Definitionen und Lemmata aus der Morse Theorie unabdingbar. Die wichtigsten Begriffe werden in diesem Kapitel erklärt und es wird ein Lemma bewiesen, welches sehr hilfreich ist für den Beweis des Konvexitätstheorems.

**Definition 4.19.** Eine differenzierbare Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine **Morse-Bott Funktion**, wenn die Menge der kritischen Punkte der Funktion  $f$ ,

$$\text{Krit}(f) = \{x \in M \mid df(x) = 0\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  und für alle  $x \in \text{Krit}(f)$  gilt:

$$T_x \text{Krit}(f) = \ker \nabla^2 f(x).$$

Dabei ist  $d^2 f(x) : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  die Hesse Matrix von  $f$  an einem kritischen Punkt  $x$ . Für Tangentialvektoren  $v$  und  $w$  seien  $\tilde{v}$  und  $\tilde{w}$  die Fortsetzung zu Vektorfeldern auf  $M$ . Die Hesse Matrix  $d^2 f(x)(v, w)$  ist definiert als  $\tilde{v}_x(\tilde{w}(f))$ , wobei  $\tilde{w}(f)$  die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $\tilde{w}$  ist. Der lineare Operator  $\nabla^2 f(x) : T_x M \rightarrow T_x M$  ist definiert als

$$g_x(\nabla^2 f(x)\cdot, \cdot) = d^2 f(x)(\cdot, \cdot),$$

wobei  $g_x$  die Riemannsche Metrik auf  $T_x M$  beschreibt.

#### Bemerkungen 4.20.

- Die Hesse Matrix  $d^2 f(x)$  an einem kritischen Punkt ist symmetrisch und wohldefiniert (vgl. [10, p. 4f]). Damit ist der lineare Operator  $\nabla^2 f(x)$  ein symmetrischer Endomorphismus auf dem Tangentialraum  $T_x M$ .

- Ist die Funktion  $f$  eine Morse-Bott Funktion, dann zerfällt die Menge der kritischen Punkte  $\text{Krit}(f)$  in endlich viele zusammenhängende kritische Mannigfaltigkeiten  $C$ .
- Der negative Gradientfluss  $\phi_t : M \rightarrow M$  von  $f$  ist definiert durch

$$\frac{d}{dt}\phi_t = -\nabla f \circ \phi_t$$

und  $\phi_0 = \text{Id}_M$ . Hier beschreibt  $\nabla f$  das Vektorfeld, welches folgende Gleichung für ein Vektorfeld  $Y$  und ein Punkt  $x \in M$  erfüllt:

$$g_x(\nabla f(x), Y(x)) = Y(f),$$

wobei  $Y(f)$  die Richtungsableitung von  $f$  in die Richtung des Vektorfeldes  $Y$  ist.

- Mithilfe des Morse-Lemmas (vgl. [10, p. 6]) folgt, dass der Tangentialraum  $T_x M$  an einem kritischen Punkt  $x \in C$  in eine direkte Summe  $T_x M = T_x C \oplus E_x^+ \oplus E_x^-$  zerfällt, wobei  $E_x^+$  und  $E_x^-$  aufgespannt sind durch die positiven und negativen Eigenräume des Operators  $\nabla^2 f(x)$ .

**Definition 4.21.** Die Punkte  $y \in M$ , deren Bahnen  $\phi_t(y)$  zur kritischen Mannigfaltigkeit  $C$  für  $t \rightarrow \infty$  konvergieren, bilden die **stabile Mannigfaltigkeit**  $W^s(C)$ . Analog wird die **unstabile Mannigfaltigkeit**  $W^u(C)$  definiert:

$$W^u(C) = \{x \in M \mid \phi_t(x) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} C\}.$$

**Definition 4.22.** Der **Index** einer zusammenhängenden kritischen Untermannigfaltigkeit  $C$  ist definiert als

$$n^-(C) = \dim(W^u(C)) - \dim(C) = \text{codim}(W^s(C))$$

und stimmt überein mit der Dimension des negativen Eigenraums der Hesse Matrix von  $f$  auf dem Normalenbündel von  $C$ . Der Koindex ist definiert als  $n^+(C) = \dim(W^s(C)) - \dim(C) = \text{codim}(W^u(C))$ .

**Bemerkung 4.23.** Da  $f$  entlang der Bahn von  $\phi_t$  abnimmt, konvergiert für  $p \in M$  die Bahn  $\phi_t(p)$  zu einer kritischen Mannigfaltigkeit für  $t \rightarrow \infty$ , also gilt

$$M = \bigcup_{C \text{ krit.}} W^s(C).$$

Das folgende Lemma wird im Beweis des Theorems Konvexitätstheorems eine Schlüsselrolle übernehmen. Der Hilfssatz wird in diesem Abschnitt bewiesen, da er mehrheitlich Begriffe aus der Morse Theorie verwendet. Zuerst folgt eine essentielle Definition für den weiteren Verlauf der Arbeit.

**Definition 4.24.** Seien  $M$  und  $N$  differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Sei  $L \subset N$  eine Untermannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung. Die Abbildung  $f$  ist **transversal** zu  $L$ , wenn die folgende Gleichung

$$T_{f(x)}N = T_{f(x)}L + \text{im}(df_x)(T_xM)$$

für alle  $x \in f^{-1}(L)$  gilt.

**Bemerkungen 4.25.** Wenn  $X, Z \subset Y$  Untermannigfaltigkeiten von  $Y$  sind und  $f : Z \rightarrow Y$  die Inklusionsabbildung, dann folgt aus der Definition, dass  $X$  transversal zu  $Z$  ist, wenn die Gleichung  $T_xX + T_xZ = T_xY$  für alle  $x \in X \cap Z$  gilt. Zwei transversal schneidende Untermannigfaltigkeiten  $X$  und  $Z$  werden als  $X \pitchfork Z$  notiert.

Die Transversalitätsbedingung ist ebenfalls erfüllt, wenn  $f^{-1}(L)$  die leere Menge ist. Mithilfe des Transversalitätssatzes (vgl. [5, p. 158]) lässt sich für eine gegebene, differenzierbare Funktion  $f : M \rightarrow N$  eine Funktion  $g : M \rightarrow N$  finden, die beliebig nahe an  $f$  ist und eine transversale Abbildung bezüglich der Untermannigfaltigkeit  $L \subset N$  ist.

**Lemma 4.26.** Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Morse-Bott Funktion auf der kompakten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit  $M$ , dessen kritische Mannigfaltigkeiten alle weder Index noch Koindex 1 haben. Dann sind die Niveaumengen  $f^{-1}(c)$  zusammenhängend für alle  $c \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Der Beweis folgt in drei Schritten. Zuerst wird gezeigt, dass es genau eine zusammenhängende kritische Mannigfaltigkeit  $C_0$  mit  $n^-(C_0) = 0$  gibt. Dann wird gezeigt, dass  $f^{-1}(c)$  zusammenhängend ist, wobei  $c$  zuerst ein regulärer Wert, dann ein kritischer Wert in  $\mathbb{R}$  ist.

Sei  $C_0$  die Vereinigung aller kritischen Mannigfaltigkeiten  $C'$  mit Index null. Da für die Mannigfaltigkeit  $M$

$$M = \bigcup_{C' \text{ krit.}} W^s(C')$$

gilt, ist  $W^s(C_0)^c$  eine Vereinigung von Mannigfaltigkeiten von Kodimension grösser gleich 2, bestehend aus den stabilen Mannigfaltigkeiten der anderen kritischen Mannigfaltigkeiten. Die stabile Mannigfaltigkeit

$$W^s(C_0) = \{x \in M \mid \phi_t(x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} C_0\}$$

ist eine offene Teilmenge in  $M$ , da die Kodimension von  $W^s(C_0)$  null ist. Zudem ist die stabile Mannigfaltigkeit wegzusammenhängend: Zwei Punkte in  $p, q \in W^s(C_0)$  können mit einem Weg  $c$  in  $M$  verbunden werden. Dieser Weg kann nun transversal abgeändert werden, sodass er nicht mehr in  $W^s(C_0)^c$  verläuft aufgrund  $\text{codim}(W^s(C_0)^c) \geq 2$ .

Die kritische Mannigfaltigkeit  $C_0$  ist nun zusammenhängend, weil für zwei Punkte  $x, y \in C_0$  existieren Punkte  $x', y'$  in  $W^s(C_0)$  mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x') = x \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \phi_s(y') = y.$$

In  $W^s(C_0)$  existiert ein Weg  $\gamma$ , welcher  $x'$  mit  $y'$  verbindet. Dieser Weg kann nun mit dem abwärtsgerichteten Gradientenfluss stetig auf  $C_0$  abgebildet werden (vgl. dazu Abbildung 2). Da die Vereinigung  $C_0$  nun zusammenhängend

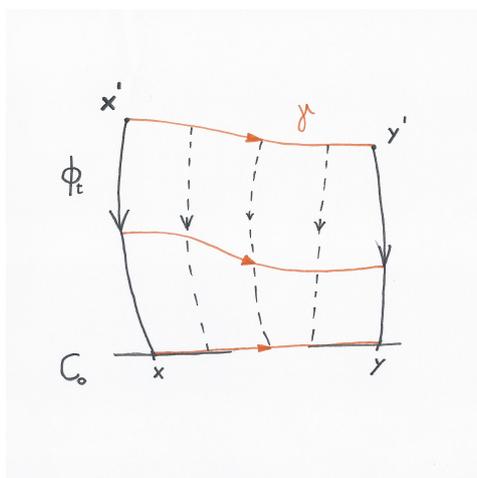


Abbildung 2:  $C_0$  ist zusammenhängend.

ist, existiert also genau eine kritische Mannigfaltigkeit  $C$  mit Index null. Analog verfährt das Verfahren mit dem Koindex.

Seien nun  $c_0 < c_1 < \dots < c_N$  die kritischen Werte von  $f$ . Die beiden eindeutigen zusammenhängenden kritischen Mannigfaltigkeiten mit Index, bzw. Koindex null sind

$$C_0 = f^{-1}(c_0)$$

$$C_N = f^{-1}(c_N).$$

Sei nun  $c$  so, dass  $c_0 < c < c_1$  und  $p, q \in f^{-1}(c)$ . Die Punkte  $p$  und  $q$  können mit dem Gradientenfluss zu Punkten verbunden werden, die sich in kleinen Umgebungen von Punkten  $p' \in C_0$  und  $q' \in C_0$  befinden. Da  $C_0$  zusammenhängend ist, gibt es einen Weg der  $p'$  und  $q'$  in  $C_0$  verbindet. Da  $n^-(C_0) = \text{codim}(W^s(C_0)) = 0$  gilt, ist  $\dim(M) = \dim(W^s(C_0))$ . Somit ist

$$n^+(C_0) = \dim(W^s(C_0)) - \dim(C_0) = \dim(M) - \dim(C_0) = \text{codim}(C_0) \geq 2.$$

Da die Kodimension von  $C_0$  grösser gleich zwei ist, kann der eindimensionale Weg von  $p'$  nach  $q'$  so verändert werden, dass er transversal zu  $C_0$  ist, also dass der Weg und  $C_0$  disjunkt sind. Mit dem Gradientenfluss kann der Weg

nun auf  $f^{-1}(c)$  abgebildet werden<sup>1</sup>. Somit ist  $f^{-1}(c)$  zusammenhängend für ein Wert  $c_0 < c < c_1$ .

Es wird nun angenommen, dass  $f^{-1}(c)$  zusammenhängend ist für  $c < c_k$ ,  $k < N$ . Seien  $x, y \in f^{-1}(c_k + \varepsilon)$ . Die Punkte  $x$  und  $y$  können zu Punkten verbunden werden, die in  $W^s(C_0)$  liegen und da  $\text{codim}(W^u(C_j)) \geq 2$  für  $j = 1, \dots, N - 1$  ist, kann diese Verbindung transversal zu allen  $W^u(C_j)$  gewählt werden. Mit dem Gradientfluss können diese Punkte zu Punkten  $x', y' \in f^{-1}(c_k - \varepsilon)$  verbunden werden. Aus der Annahme folgt nun, dass  $x'$  und  $y'$  durch einen Weg verbunden sind. Dieser Weg kann nun wieder transversal zu allen  $W^u(C_j)$  gewählt werden, da  $\text{codim}(W^u(C_j)) \geq 2$  für  $j = 1, \dots, N - 1$  gilt. Somit liegt der gesamte Weg von  $x$  nach  $y$  in  $W^u(C_N)$ . Mit dem Gradientfluss kann der Weg auf das Niveau  $f^{-1}(c_k + \varepsilon)$  abgebildet werden und liefert einen Weg von  $x$  nach  $y$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $f^{-1}(c_k)$  zusammenhängend ist für einen singulären Wert  $c_k$ ,  $0 < k < N$ . Sei  $c_k < c$  ein regulärer Wert, sodass  $(c_k, c]$  keine weiteren singulären Werte enthält. Sei  $x \in f^{-1}(c)$  und  $\phi_t$  der abwärtsgerichtete Gradientfluss von  $f$ . Es existiert nun eine stetige Surjektion:

$$\Psi : f^{-1}(c) \rightarrow f^{-1}(c_k).$$

Die Abbildung ist folgendermassen definiert:

- Wenn  $c_k < f(\phi_t(x))$  für alle  $t > 0$ :

$$\Psi(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x).$$

- Sonst wähle ein Zeitpunkt  $t_x > 0$ , sodass  $f(\phi^{t_x}(x)) = c_k$  und definiere

$$\Psi(x) := \phi^{t_x}(x).$$

Die Abbildung  $\Psi$  ist surjektiv: Weil  $f$  eine Morse-Bott Funktion ist, ist jeder Punkt  $x \in M$  in einer (un-)stabilen Mannigfaltigkeit enthalten (vgl. Bemerkung 4.23). Die Stetigkeit erfolgt durch Nachrechnen (vgl. weiterführend [9, p. 185] und [11]).  $\square$

## 5 Theorem von Atiyah-Guillemin-Sternberg

In diesem Kapitel wird das Konvexitätstheorem aus Atiyahs Artikel [1, p. 2] erklärt, ein paar Beispiele werden gegeben und anschliessend folgt der Beweis des Satzes.

---

<sup>1</sup>Dabei muss allerdings beachtet werden, dass der Gradientfluss den Weg auch auf  $f^{-1}(c)$  abbildet. Dieses Problem kann durch Normalisieren des Flusses gelöst werden.

### 5.1 Konvexitätssatz

**Theorem 5.1** (Atiyah-Guillemin-Sternberg). Sei  $(M, \omega)$  eine kompakte, zusammenhängende, symplektische Mannigfaltigkeit und  $f_1, \dots, f_n$  reellwertige Funktionen, welche in der Poissonklammer kommutieren und dessen Hamiltonsche Vektorfelder  $X_k$  mit  $df_k = \iota(X_k)\omega$  eine Torusaktion erzeugen, i.e. deren Flüsse eine Untergruppe in  $\text{Diff}(M)$  bilden, dessen Abschluss einen Torus bildet. Dann erfüllt die Abbildung  $f = (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  folgende Aussagen:

$A_n$  : Alle Niveaumengen  $f^{-1}(c)$  sind entweder leer oder zusammenhängend für  $c \in \mathbb{R}$ .

$B_n$  : Das Bild  $f(M)$  ist konvex.

Wenn  $C_1, \dots, C_N$  die zusammenhängenden Komponenten der Menge  $C \subset M$  der gemeinsamen kritischen Punkte der  $f_k$  sind, dann ist  $f(C_k) = c_k$  ein einzelner Punkt und  $f(M)$  ist die konvexe Hülle der Punkte  $c_1, \dots, c_N$ .

### Beispiele 5.2.

- Es operiere der Kreis  $S^1$  auf  $\mathbb{C}$  durch

$$\psi_t(z) = t^k z$$

für ein  $t \in S^1$  und ein festes  $k \in \mathbb{Z}$ . Das Vektorfeld für  $\frac{\partial}{\partial \theta} \in T_1 S^1 = \mathfrak{s}^1$  ist dargestellt durch

$$X_{\frac{\partial}{\partial \theta}} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_{\exp(t \frac{\partial}{\partial \theta})} = k \frac{\partial}{\partial \theta} = -ky \frac{\partial}{\partial x} + kx \frac{\partial}{\partial y},$$

wobei die letzte Gleichheit die Umformung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten ist. Die Momentabbildung der Kreisaktion ist eine Hamiltonsche Funktion  $H$ , die der Operation zugeordnet werden kann. Für  $Y = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$  kann

$$\begin{aligned} \omega_0(k(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}), a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}) &= dx \wedge dy (k(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}), a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}) \\ &= k(-yb + ax) = dH(Y). \end{aligned} \quad (7)$$

berechnet werden. Die Funktion  $H(x, y) = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$  erfüllt die Gleichung (7). Somit ist die Funktion  $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$

$$H(z) = \frac{k}{2}|z|^2$$

eine Momentabbildung für die Kreisoperation.

- Ähnliches lässt sich für die Aktion des Torus  $\mathbb{T}^n$  auf  $\mathbb{C}^n$  berechnen. Die Torusaktion sei definiert durch

$$\psi_t(z) = (t_1^{k_1} z_1, \dots, t_n^{k_n} z_n),$$

für  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$  fest,  $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}^n$  und  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ . Das Vektorfeld bezüglich eines Basisvektors  $\frac{\partial}{\partial \theta_1} \in \mathfrak{t}^n$  ist

$$X_{\frac{\partial}{\partial \theta_1}} = k_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1}.$$

Die Momentabbildung ist gegeben durch

$$\mu(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2}(k_1 |z_1|^2, \dots, k_n |z_n|^2) + \text{const.} \in \mathfrak{t}^n \cong \mathbb{R}^n.$$

- Nun operiere der Torus  $\mathbb{T}^{n+1}$  auf dem komplexen, projektiven Raum  $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$  durch

$$\psi_{(t_0, \dots, t_n)}([z_0 : z_1 : \dots : z_n]) = [t_0 z_0 : t_1 z_1 : \dots : t_n z_n].$$

Sei  $q : S(\mathbb{C}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{C}P^n$  die Projektion der Einheitskugel  $S(\mathbb{C}^{n+1}) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z|^2 = 1\}$  in den komplexen, projektiven Raum. Es kann gezeigt werden, dass es eine eindeutige 2-Form  $\omega$  auf dem komplexen projektiven Raum  $\mathbb{C}P^n$  gibt, die  $q^* \omega = \omega_0|_{S(\mathbb{C}^{n+1})}$  erfüllt (die sogenannte Fubini-Study Form, vgl. dazu [4, p. 18]). Damit ist die Momentabbildung  $\mu : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  von der Form

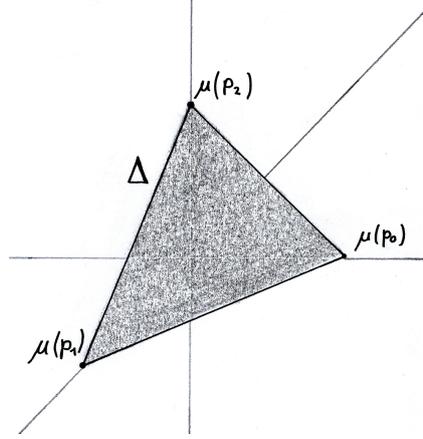
$$\mu([z_0 : \dots : z_n]) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{|z_0|^2}{\|z\|^2}, \dots, \frac{|z_n|^2}{\|z\|^2} \right),$$

wobei  $\|z\|^2 = \sum_{i=0}^n |z_i|^2$ . Also ist das Bild von  $\mu$  der Simplex

$$\Delta = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{>0}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = \frac{1}{2} \right\}.$$

Die Aktion hat  $n+1$  Fixpunkte der Form  $p_i = [0 : \dots : 0 : 1 : 0 : \dots : 0]$ . Diese Punkte werden von  $\mu$  auf die Ecken von  $\Delta$  abgebildet. Somit ist das Bild von  $\mu$  die konvexe Hülle von den Punkten  $\mu(p_0), \dots, \mu(p_n)$ . Zur Illustration wird der Fall  $n=2$  in Abbildung 3 gezeigt: Die Punkte  $p_0, p_1$  und  $p_2$  werden abgebildet auf die Punkte

$$\begin{aligned} \mu(p_0) &= \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \\ \mu(p_1) &= \left(0, \frac{1}{2}, 0\right) \\ \mu(p_2) &= \left(0, 0, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Abbildung 3: Konvexe Hülle der Toruswirkung auf  $\mathbb{C}P^2$ 

**Bemerkung 5.3.** Es kann gezeigt werden ( $\star$ ), dass die Aussage  $A_n$  die Aussage  $B_{n+1}$  impliziert. Zudem ist die Aussage  $B_1$  korrekt, da jede kompakte und zusammenhängende Menge in  $\mathbb{R}$  ein Intervall ist. Der Beweis wird aufgrund dieser beiden Bemerkungen induktiv fortfahren.

*Beweis von ( $\star$ ).* Seien  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lineare Projektion auf  $\mathbb{R}^n$  und  $g = \pi \circ f$ . Dann gilt

$$f(M) \cap \pi^{-1}(c) = f(g^{-1}(c)) \quad (8)$$

für jedes  $c \in \mathbb{R}^n$ :

Wenn  $x \in f(M) \cap \pi^{-1}(c)$  mit  $x = f(z)$  ist, dann folgt

$$f(z) = x \Rightarrow \pi \circ f(z) = c \Leftrightarrow g(z) = c \Rightarrow z \in g^{-1}(c) \Rightarrow x \in f(g^{-1}(c)).$$

Wenn  $x \in f(g^{-1}(c))$ , dann ist einerseits  $x \in f(M)$ , da  $g^{-1}(c) \subseteq M$  ist und andererseits gibt es ein  $y \in g^{-1}(c)$  mit

$$x = f(y) \Rightarrow \pi(x) = \pi(f(y)) = g(y) = c \Rightarrow x \in \pi^{-1}(c).$$

Wenn nun die Behauptung  $A_n$  auf die Funktion  $g$  angewendet wird, folgt daraus, dass  $f(g^{-1}(c))$  zusammenhängend oder leer ist. Da  $\pi$  und  $c \in \mathbb{R}^n$  in (8) beliebig waren, ist der Schnitt von  $f(M)$  mit  $\pi^{-1}(c)$  entweder ein Geradensegment in  $\mathbb{R}^{n+1}$  oder die leere Menge. Somit wurde gezeigt, dass  $f(M)$  konvex ist.  $\square$

## 5.2 Vorbereitende Lemmata

Um die weiteren Lemmata zu beweisen, werden fast komplexe Strukturen verwendet. Zuerst wird gezeigt, dass eine fast komplexe Struktur existiert,

die invariant unter der Torusaktion ist und kompatibel mit der symplektischen Form  $\omega$ . Diese fast komplexe Struktur wird dann eingesetzt um zu zeigen, dass die Fixpunktmenge der Aktion eine symplektische Untermannigfaltigkeit von  $M$  ist.

**Lemma 5.4.** Es existiert eine fast komplexe Struktur  $J$  auf  $M$ , welche kompatibel mit  $\omega$  und invariant unter der Torusaktion ist, i.e. es gilt  $\psi_g^* J = J$  für alle  $g \in \mathbb{T}^n$ .

*Beweis.* Sei  $g_0$  eine Metrik auf  $M$ . Durch Mittelung der Metriken über dem Torus  $\psi_g^* g_0$  für  $g \in \mathbb{T}^n$  resultiert eine Metrik

$$g(v, w) = \int_{h \in \mathbb{T}^n} \psi_h^* g_0(v, w),$$

welche invariant unter der Toruswirkung ist

$$g(\psi_t(v), \psi_t(w)) = \int_{h \in \mathbb{T}^n} \psi_h^* \circ \psi_t^* g_0(v, w) = \int_{h' \in \mathbb{T}^n} \psi_{h'}^* g_0(v, w) = g(v, w),$$

wobei  $th = h' \in \mathbb{T}^n$ . Das Bild<sup>2</sup> der Metrik  $g$  unter der Abbildung aus Lemma 3.7 ist eine invariante fast komplexe Struktur, welche kompatibel mit  $\omega$  ist:

$$\begin{aligned} \psi_h^* r(g) &= r(\psi_h^* g) = r(g) \\ \omega(r(g)v, r(g)w) &= \omega(v, w). \end{aligned}$$

□

**Lemma 5.5.** Für die Fixpunktmenge  $\text{Fix}(G)$  von  $G < \mathbb{T}^n$  gilt, dass

$$\text{Fix}(G) = \bigcap_{t \in G} \text{Fix}(\psi_t)$$

eine symplektische Untermannigfaltigkeit von  $M$  ist.

*Beweis.* Um zu beweisen, dass es sich um eine symplektische Untermannigfaltigkeit handelt, muss gezeigt werden, dass für jedes  $x \in \text{Fix}(G)$  der Tangentialraum  $T_x \text{Fix}(G)$  ein symplektischer Untervektorraum in  $T_x M$  ist. Sei  $x \in \text{Fix}(G)$  und für  $t \in G$  sei  $\Psi_t := d\psi_t(x) : T_x M \rightarrow T_x M$ . Da  $\Psi_t$  ein linearer Symplektomorphismus und  $g$  invariant unter der Torusaktion ist (vgl. Lemma 5.4), folgt die Gleichung

$$\omega_x(\Psi_t v, \Psi_t J_x w) = \omega_x(v, J_x w) = g_x(v, w) = g_x(\Psi_t v, \Psi_t w) = \omega_x(\Psi_t v, J_x \Psi_t w).$$

<sup>2</sup>Es konnte nicht direkt über den fast komplexen Strukturen gemittelt werden, da daraus möglicherweise keine komplexe Struktur resultiert.

Mit Lemma 2.11 folgt, dass die Abbildung  $\Psi_t$  eine unitäre Aktion von  $G$  auf dem komplexen Vektorraum  $(T_x M, \omega_x, J_x)$  definiert.

Die Exponentialabbildung  $\exp_x : T_x M \rightarrow M$  ist äquivariant bezüglich der Metrik  $g$ , i.e.:

$$\exp_x(\Psi_t v) = \psi_t(\exp_x(v)) \quad \forall t \in G \text{ und } v \in T_x M. \quad (9)$$

Diese Äquivalenz folgt daraus, dass wenn  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Geodäte ist, dann ist  $\psi \circ \gamma$  ebenfalls eine Geodäte.

Nun sei  $y \in U_x$  für eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x$  mit  $\psi_t(y) = y$  und  $\exp_x(\xi) = y$ . Mit der Gleichung (9) folgt

$$y = \psi_t(\exp_x(\xi)) = \exp_x(\Psi_t \xi).$$

Also entsprechen die Fixpunkte von  $\psi_t$  nahe  $x$  den Fixpunkten von  $\Psi_t$  im Tangentialraum  $T_x M$ . Also gilt

$$T_x \text{Fix}(G) = \bigcap_{t \in G} \ker(\mathbb{1} - \Psi_t).$$

Da  $\Psi_t$  eine unitäre Abbildung auf  $T_x M$  ist, gilt für ein  $z \in \ker(\mathbb{1} - \Psi_t)$ :

$$J_x(z) = J_x(\Psi_t(z)) = \Psi_t(J_x(z)).$$

Also ist der Eigenraum von  $\Psi_t$  mit Eigenwert 1 invariant unter  $J_x$ . Für das symplektische Komplement von  $T_x \text{Fix}(G)$  folgt nun

$$\begin{aligned} T_x \text{Fix}(G)^\omega &= \{v \in T_x M \mid \omega_x(v, w) = 0 \forall w \in T_x \text{Fix}(G)\} \\ &= \{v \in T_x M \mid \omega_x(v, J_x(w)) = 0 \forall J_x(w) \in T_x \text{Fix}(G)\} \\ &= \{v \in T_x M \mid g_x(v, w) = 0 \forall w \in T_x \text{Fix}(G)\}, \end{aligned}$$

also ist  $T_x \text{Fix}(G) \cap T_x \text{Fix}(G)^\omega = \{0\}$ . Aus der Bemerkung 2.5 folgt nun, dass  $T_x \text{Fix}(G)$  ein symplektischer Untervektorraum in  $T_x M$  ist.  $\square$

**Lemma 5.6.** Für jedes  $t \in \mathfrak{t} \cong \mathbb{R}^n$  ist die Hamiltonsche Funktion  $H_t = \langle \mu, t \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Morse-Bott Funktion mit kritischen Mannigfaltigkeiten von gerader Dimension mit geradem Index. Die kritische Menge

$$\text{Krit}(H_t) = \bigcap_{\tau \in T_t} \text{Fix}(\psi_\tau)$$

ist eine symplektische Mannigfaltigkeit, wobei

$$T_t = \overline{\{st + k \mid s \in \mathbb{R} \ k \in \mathbb{Z}^n\}} / \mathbb{Z}^n$$

der geschlossene Torus ist, erzeugt durch  $t$ .

*Beweis.* Es kann angenommen werden, dass  $t$  rational unabhängige Komponenten hat, sodass die Menge  $\{st + k \mid s \in \mathbb{R} \ k \in \mathbb{Z}^n\}$  eine dichte Teilmenge in  $\mathbb{R}^n$  ist. Dann ist jeder kritische Punkt  $x$  von  $H_t = \langle \mu, t \rangle$  ein Fixpunkt bezüglich der Aktion der Gruppe  $T_t$ , also ist

$$\text{Krit}(H_t) = \bigcap_{\tau \in T_t} \text{Fix}(\psi_\tau).$$

Aus Lemma 5.5 folgt, dass die kritischen Punkte von  $H_t$  eine symplektische Untermannigfaltigkeit in  $M$  bilden. Es bleibt zu zeigen, dass für ein  $x \in \text{Krit}(H_t)$  der Tangentialraum  $T_x \text{Krit}(H_t)$  dem Kern der Abbildung  $\nabla^2 H_t(x)$  entspricht.

Der Tangentialraum  $T_0 TM$  lässt sich in einen horizontalen und einen vertikalen Teil aufspalten:

$$T_0 TM = \iota_*(T_x M) \oplus \ker(p_*).$$

Hierbei ist  $\iota_*$  das Differential des Nullschnittes  $\iota : M \rightarrow TM$  und  $p_*$  das Differential der Projektion  $p : TM \rightarrow M$ . Die Projektion des Vektorfeldes  $dX_{H_t} : T_x M \rightarrow T_0(T_x M)$  auf den vertikalen Teil  $\ker(p_*)$  definiert eine lineare Abbildung  $dX'_{H_t} : T_x M \rightarrow T_x M$ . Da  $x$  ein kritischer Punkt ist, gilt für einen linearen Zusammenhang  $\nabla$  auf dem Tangentialbündel, dass für ein  $v \in T_x M$ ,  $\nabla_v(X)$  der Projektion von  $dX$  auf den vertikalen Teil von  $T_0 TM$  entspricht. Also gilt in diesem Fall

$$\nabla_v(X_{H_t}) = dX'_{H_t}(x)(v).$$

Sei  $S_x = \nabla^2 H_t(x) : T_x M \rightarrow T_x M$  und  $\hat{v}$  die lokale Fortsetzung von  $v$  zu einem Vektorfeld. Aus der Definition der Hesse Matrix  $d^2 H_t(x)$  folgt:

$$\begin{aligned} g_x(S_x(y), v) &= d^2 H_t(x)(y, v) = y(dH_t(\hat{v})) \\ &= y(\omega_x(X_{H_t}, \hat{v})) = -y(g_x(X_{H_t}, J_x \hat{v})). \end{aligned}$$

Also gilt für  $g_x(-J_x S_x(y), J_x v) = y(g_x(X_{H_t}, J_x \hat{v}))$ . Mit den Eigenschaften des Levi-Civita Zusammenhangs  $\nabla$  und dass das Vektorfeld  $X_{H_t}$  am Punkt  $x$  verschwindet, folgt:

$$\begin{aligned} y(g_x(X_{H_t}, J_x \hat{v})) &= g_x(\nabla_y X_{H_t}, J_x \hat{v}) + g_x(X_{H_t}, \nabla_y J_x \hat{v}) \\ &= g_x(\nabla_y X_{H_t}, J_x \hat{v}) \\ &= g_x(dX'_{H_t}(x)(y), J_x \hat{v}). \end{aligned}$$

Also ist  $\langle -J_x S_x(y), J_x \hat{v} \rangle = g(dX'_{H_t}(x)(y), J_x \hat{v})$  für alle  $y, v$  im Tangentialraum  $T_x M$ . Daraus folgt  $-J_x S_x = dX'_{H_t}$ .

Um den Fluss des Vektorfeldes  $dX'_{H_t}$  zu berechnen, wird die Abbildung  $\exp_x : T_x M \rightarrow M$  betrachtet. Durch die Gleichung (9) wurde gezeigt, dass

$\exp_x$  lokal ein äquivarianter Diffeomorphismus ist. Damit kann die Aktion der Gruppe  $T_t$  in einer Umgebung um  $0 \in T_x M$  betrachtet werden. Der Fluss  $\psi_{st} : T_x M \rightarrow T_x M$  der Aktion auf dem Vektorraum  $T_x M$  ist  $\psi_{st} = \exp(-sJ_x S_x)$ . Somit gilt  $d\psi_{st} = \exp(-sJ_x S_x)$  für den Fluss des linearen Vektorfeldes  $dX'_{H_t}$ .

Der Kern der Abbildung  $S_x$  entspricht den Fixpunkten des Flusses  $d\psi_{st}$ . Da  $t$  rational unabhängige Komponenten hat, entsprechen die Fixpunkte von  $d\psi_{st}$  den gemeinsamen Fixpunkten der Matrizen  $d\psi_\tau$  für  $\tau \in \mathbb{T}^n$ . Somit ist

$$T_x \text{Krit}(H_t) = \bigcap_{\tau \in T_t} \ker(\mathbb{1} - d\psi_\tau) = \ker S_x.$$

Die Gruppe  $G = \{\exp(-sJ_x S_x) \mid s \in \mathbb{R}\}$  ist unitär, also kommutiert die Abbildung  $S_x$  mit  $J_x$ . Deshalb sind alle Eigenräume von  $S_x$  invariant unter  $J_x$  und darum von gerader Dimension. Somit hat die Mannigfaltigkeit der kritischen Punkte von  $H_t$  einen geraden Index.

Es kann mit dem gleichen Verfahren wie im Beweis des Lemmas 5.5 gezeigt werden, dass der Tangentialraum  $T_x \text{Krit}(H_t) = \ker S_x$  ein komplexer Vektorraum und deshalb ein symplektischer Unterraum von  $T_x M$  ist.

Das Lemma wurde nun bewiesen unter der zusätzlichen Annahme, dass  $t \in \mathbb{R}^n$  rational unabhängige Komponenten hat. Der allgemeine Fall folgt aus der Restriktion auf die Aktion des geschlossenen Untertorus  $T_t \subset \mathbb{T}^n$ .  $\square$

Die beiden Lemmata 4.26 und 5.6 zusammen ergeben folgendes Lemma, womit alle Lemmata gezeigt wurden, um das Theorem von Atiyah-Guillemin-Sternberg beweisen zu können.

**Lemma 5.7.** Sei  $(M, \omega)$  eine kompakte, zusammenhängende, symplektische Mannigfaltigkeit,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, dessen Hamiltonsches Vektorfeld eine Torusaktion erzeugt. Für jedes  $c \in \mathbb{R}$  sind die Niveaumengen  $f^{-1}(c)$  zusammenhängend oder leer.

### 5.3 Beweis des Theorems

*Beweis von Theorem 5.1.* Lemma 5.7 beweist die Aussage  $A_1$ . Per Induktion wird nun die Behauptung  $A_{n+1}$  bewiesen. Dafür wird angenommen, dass die Aussage  $A_n$  bereits bewiesen wurde. Seien  $f_1, \dots, f_{n+1}$  Funktionen auf  $M$ , welche die Voraussetzungen des Theorems erfüllen. Es wird gezeigt, dass wenn  $c = (c_1, \dots, c_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , dann ist die Niveaumenge

$$f^{-1}(c) = f_1^{-1}(c_1) \cap \dots \cap f_{n+1}^{-1}(c_{n+1})$$

zusammenhängend.

Es kann angenommen werden, dass  $f_1, \dots, f_{n+1}$  linear unabhängig sind, ansonsten kann eine Funktion als Linearkombination der anderen dargestellt

werden und mit  $A_n$  folgt die Aussage. Aufgrund der Stetigkeit der Funktion  $f$  und des Satzes von Sard (vgl. [5, p. 58]) reicht es aus, nur reguläre Werte  $c \in \mathbb{R}^{n+1}$  zu berücksichtigen. Das sind Werte, für die die Funktionen  $df_1, \dots, df_{n+1}$  linear unabhängig sind für alle  $x \in f^{-1}(c)$ . Mit diesen Annahmen folgt, dass  $N = f_1^{-1}(c_1) \cap \dots \cap f_n^{-1}(c_n)$  entweder eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit der Kodimension  $n$  in  $M$  oder die leere Menge ist. Es kann nun gezeigt werden, dass  $f_{n+1}|_N$  die Bedingungen des Lemmas 4.26 erfüllt:

Seien dazu  $\hat{f} = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $\hat{c} = (c_1, \dots, c_n)$  und  $x \in N$  ein kritischer Punkt für  $f_{n+1}|_N$ . Aus dieser Notation folgt  $N = \hat{f}^{-1}(\hat{c})$ , also dass  $d\hat{f}|_{T_x N} = 0$  gilt. Also ist für  $T_x M = T_x N \oplus (\nu_{N \subset M})_x$  das Differential  $d\hat{f}$  auf dem Normalenbündel  $\nu' := (\nu_{N \subset M})_x$  ungleich null. Da  $N$  eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension  $n$  ist, folgt:

$$d\hat{f} : \nu' \xrightarrow{\cong} \nu_{\hat{c}} = T_{\hat{c}} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n.$$

Demnach lässt sich jeder Vektor im Dualraum  $(\nu')^*$  als Linearkombination von  $df_1, \dots, df_n$  schreiben. Für das Differential  $df_{n+1}|_{\nu'} : \nu' \rightarrow \mathbb{R}$  folgt entsprechend, dass  $df_{n+1} \in \text{span}(df_1, \dots, df_n)$ . Also gilt lokal im Punkt  $x$ :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i df_i + df_{n+1} = 0,$$

wobei die Skalare  $\lambda_i = \lambda_i(x)$  abhängig vom Punkt  $x$  sind. Ein solcher Punkt ist dann ein kritischer Punkt für die Funktion  $H_\lambda = \langle f, \lambda \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Mit Lemma 5.6 folgt, dass alle kritische Mengen von  $H_\lambda$  Mannigfaltigkeiten von gerader Dimension mit geradem Index sind. Sei nun  $Z$  die kritische Mannigfaltigkeit von  $H_\lambda$ , welche den Punkt  $x$  enthält. Angenommen  $Z$  und  $N$  schneiden sich transversal. Wenn das gilt, ist der Unterraum  $T_x N \cap T_x Z^\perp$  ein Komplement von  $T_x Z$  im Tangentialraum  $T_x M$ . Da der Tangentialraum an einem kritischen Punkt  $x \in Z$  in die direkte Summe  $T_x M = T_x Z \oplus E_x^+ \oplus E_x^-$  zerfällt und die Hessematrix  $H_\lambda$  nicht entartet ist auf  $E_x^+$  und  $E_x^-$ , ist die Hessematrix nicht entartet auf  $T_x N \cap T_x Z^\perp$  mit geradem Index und Koindex. Daraus folgt (vgl. [9, p. 189]), dass  $Z \cap N$  eine kritische Mannigfaltigkeit ist für  $H_\lambda|_N$  mit geradem Index und Koindex.

Dasselbe gilt für  $f_{n+1}|_N$ , da sich die beiden Funktionen nur um die Konstante  $\sum \lambda_i c_i$  unterscheiden. Die Funktion  $f_{n+1}|_N : N \rightarrow \mathbb{R}$  hat also nur kritische Mannigfaltigkeiten von geradem Index und Koindex. Da  $x \in N$  ein beliebiger kritischer Punkt war, folgt mit Lemma 4.26, dass

$$(f_{n+1}|_N)^{-1}(c_{n+1}) = N \cap f_{n+1}^{-1}(c_{n+1}) = f^{-1}(c)$$

zusammenhängend oder leer ist für jedes  $c_{n+1}$ . Daraus folgt die Behauptung  $A_{n+1}$ . Es bleibt zu zeigen, dass sich  $Z$  und  $N$  transversal schneiden.

Die Hamiltonschen Vektorfelder  $X_j$  stammen von den Funktionen  $df_j$ , also sind die linear unabhängigen Vektoren  $X_j(x)$  im Tangentialraum  $T_x Z$ . Da  $Z$  bezüglich  $\omega$  nicht entartet ist, existiert für jede Konstante  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  ungleich null ein Tangentialvektor  $v \in T_x Z$  mit

$$\omega\left(\sum_{i=1}^n \mu_i X_i(x), v\right) \neq 0.$$

Aus der Definition der  $X_i$  folgt nun

$$\left\{\sum_{i=1}^n \mu_i df_i\right\}(v) \neq 0.$$

Somit sind die Funktionen  $df_1, \dots, df_n$  linear unabhängig, wenn sie auf  $T_x Z$  eingeschränkt werden. Aufgrund dieser Eigenschaft und weil  $T_x N$  von Kodimension  $n$  ist, hat  $T_x Z + T_x N$  dieselbe Dimension wie  $T_x M$ . Weil der Raum  $T_x Z + T_x N$  im Tangentialraum  $T_x M$  enthalten ist, folgt  $T_x M = T_x Z + T_x N$ , womit die Transversalität von  $Z$  und  $N$  gezeigt wurde.

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $f(C_k) = c_k$  gilt und  $f(M)$  die konvexe Hülle für die Punkte  $c_1, \dots, c_N$  ist, wenn  $C_1, \dots, C_N$  die zusammenhängenden Komponenten der Menge der gemeinsamen kritischen Punkten der Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  sind.

Die Menge  $C \subset M$  der gemeinsamen kritischen Punkte der Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  entspricht den Fixpunkten der Torusaktion, die von den Hamiltonschen Vektorfelder  $X_1, \dots, X_n$  erzeugt wird (vgl. Proposition 4.18). Die Menge  $C$  ist eine Vereinigung von zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten  $C_k$ . Auf jeder Komponente  $C_k$  ist  $df_j = 0$  für alle  $j = 1, \dots, n$ , also ist jede Funktion  $f_j$  konstant. Somit ist  $f(C_k) = c_k$  ein Punkt in  $\mathbb{R}^n$ .

Bisweilen wurde gezeigt, dass das Bild  $f(M)$  konvex ist. Somit gilt

$$\text{conv}(c_1, \dots, c_n) \subset f(M).$$

Sei nun  $c \in \mathbb{R}^n$  ein Punkt mit  $c \notin \text{conv}(c_1, \dots, c_n)$ . Zunächst ein paar allgemeine Bemerkungen über konvexe Mengen:

Eine Hyperebene  $E$  ist eine Stützebene einer konvexen Menge  $A$ , wenn  $E \cap A \neq \emptyset$  und  $A$  vollständig in einem Halbraum von  $E$  liegt. Der Halbraum, der  $A$  enthält, ist der Stützhalbraum von  $A$ . Es kann gezeigt werden, dass eine kompakte, konvexe Menge der Durchschnitt ihrer Stützhalbräume ist (vgl. dazu [3]). Ein Stützhalbraum  $H(v, \lambda)$  wird durch die Gleichung  $\langle x, v \rangle \leq \lambda$  beschrieben, für  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $|v| = 1$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Da  $c \notin \text{conv}(c_1, \dots, c_n)$  und  $\text{conv}(c_1, \dots, c_n)$  der Durchschnitt aller Stützhalbräume ist, gibt es einen Stützhalbraum  $H(v, \lambda)$ , der  $c$  ebenso nicht enthält. Also gilt  $\lambda < \langle c, v \rangle$ . Da die Punkte  $c_1, \dots, c_n$  im Stützhalbraum  $H(v, \lambda)$  enthalten sind, folgt  $\langle c_j, v \rangle < \langle c, v \rangle$  für alle  $j$ . Für Punkte  $c' \in \text{conv}(c_1, \dots, c_n)$  gilt:

$$\langle c', v \rangle = \sum a_i \langle c_i, v \rangle \leq \max \langle c_i, v \rangle.$$

Da  $f$  das Maximum auf einem  $C_j$  annimmt, folgt:

$$\sup_{p \in C_j} \langle f(p), v \rangle < \langle c, v \rangle.$$

Also gilt  $c \notin f(M)$ . Dementsprechend ist  $f(M)$  die konvexe Hülle der Punkte  $c_1, \dots, c_n$ .  $\square$

## 6 Anwendung

Zum Schluss wird eine Anwendungsmöglichkeit des Theorems von Atiyah-Guillemin-Sternberg gezeigt. Hierbei wird das Theorem von Schur und Horn thematisiert, welches die Eigenwerte von Hermiteschen Matrizen und dessen Diagonaleinträge betrachtet. Zuerst folgen vorbereitende Bemerkungen über koadjungierte Aktionen.

### 6.1 Koadjungierte Aktion

Die koadjungierte Aktion von  $G$  auf  $\mathfrak{g}^*$  ist definiert als  $\text{Ad}_g^*$ :

$$\langle \text{Ad}_g^* f, X \rangle = \langle f, \text{Ad}_{g^{-1}} X \rangle,$$

wobei  $g \in G$ ,  $X \in \mathfrak{g}$  und  $f \in \mathfrak{g}^*$  sind. Für ein  $X \in \mathfrak{g}$  wird das durch die koadjungierte Aktion assoziierte Vektorfeld  $\hat{X}_f := \hat{X}(f) \in T_f \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}^*$  definiert als

$$\begin{aligned} \langle \hat{X}_f, Y \rangle &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \text{Ad}_{\exp(tX)}^* f, Y \rangle \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle f, \text{Ad}_{\exp(-tX)} Y \rangle \\ &= \langle f, -\text{ad}(X)Y \rangle = \langle f, [Y, X] \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Für jedes  $f \in \mathfrak{g}^*$  definiert  $\omega_f(X, Y) = \langle f, [X, Y] \rangle$  eine schiefsymmetrische, Bilinearform auf  $\mathfrak{g}$ . Für den Kern der Abbildung  $\omega_f$  folgt

$$\begin{aligned} \ker(\omega_f) &= \{X \in \mathfrak{g} \mid \omega_f(X, Y) = 0 \forall Y \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g} \mid \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \text{Ad}_{\exp(-tX)}^* f, Y \rangle = 0 \forall Y \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}^*(X)f = 0\} = \text{stab}(f), \end{aligned}$$

wobei  $\text{stab}(f)$  die Lie-Algebra des Stabilisators von  $f \in \mathfrak{g}^*$  ist. Somit ist  $\omega_f$  eine nicht entartete, schiefsymmetrische Bilinearform auf  $\mathfrak{g}/\text{stab}(f)$ . Jedem  $X \in \mathfrak{g}/\text{stab}(f)$  kann nun durch Gleichung (10) ein  $\hat{X}_f \in T_f(G.f)$  zugeordnet werden. Somit wird der Quotientenraum  $\mathfrak{g}/\text{stab}(f)$  identifiziert mit dem

Tangentialraum der Bahn  $G.f$  der koadjungierten Aktion. Damit induziert  $\omega_f$  eine nicht entartete 2-Form auf der Bahn  $G.f$  der koadjungierten Aktion:

$$\omega_f(\hat{X}_f, \hat{Y}_f) = \langle f, [X, Y] \rangle.$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $d\omega_f = 0$  ist. Dazu wird Folgendes für die Vektorfelder  $X' = \hat{X}_f$ ,  $Y' = \hat{Y}_f$  und  $Z' = \hat{Z}_f$  berechnet:

$$\begin{aligned} d\omega_f(X', Y', Z') &= X'(\omega_f(Y', Z')) + Y'(\omega_f(Z', X')) + Z'(\omega_f(X', Y')) \\ &\quad - \omega_f([X', Y'], Z') - \omega_f([Z', X'], Y') - \omega_f([Y', Z'], X'). \end{aligned} \quad (11)$$

Für die Terme aus (11) lässt sich zeigen, dass

$$\begin{aligned} X'(\omega_f(Y', Z')) &= X'(\langle f, [Y, Z] \rangle) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \text{Ad}_{\exp(tX)}^* f, [Y, Z] \rangle = -\langle f, [X, [Y, Z]] \rangle \end{aligned}$$

und für die restlichen Terme folgt

$$\omega_f([X', Y'], Z') = \omega_f([X, Y]', Z') = \langle f, [[X, Y], Z] \rangle.$$

Mit der Jacobi-Identität folgt die Geschlossenheit der 2-Form  $\omega_f$ . Somit ist  $\omega_f$  eine symplektische Struktur auf der Bahn der koadjungierten Aktion. Für die Momentabbildung der koadjungierten Aktion kann mit der Definition von  $\omega_f$  und Gleichung (10) für ein  $\hat{Y}_f$  Folgendes berechnet werden:

$$\omega_f(\hat{X}_f, \hat{Y}_f) = \langle f, [X, Y] \rangle = \langle \hat{Y}_f, X \rangle.$$

Mit der Inklusionsabbildung  $\mu : G.f \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$  folgt die Gleichung

$$\langle \hat{Y}_f, X \rangle = d(\langle \mu(\hat{Y}_f), X \rangle).$$

Also entspricht die Momentabbildung der Inklusion von  $G.f$  in  $\mathfrak{g}^*$ .

## 6.2 Theorem von Schur-Horn

**Theorem 6.1** (Schur-Horn). Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  Eigenwerte einer Hermiteschen Matrix  $A = A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Dann liegt der Vektor  $a = (a_1, \dots, a_n)$  der Diagonaleinträge von  $A$  in der konvexen Hülle der Punkte  $\text{conv}(\lambda) = (\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})$  aller Permutationen  $\sigma \in S_n$ .

Umgekehrt gilt: Für jeden Vektor  $a$  in dieser konvexen Hülle existiert eine Hermitesche Matrix  $A$  mit Diagonaleinträgen  $a_k$  und Eigenwerten  $\lambda_k$ .

*Beweis.* Sei  $G = U(n)$  die Gruppe der unitären Matrizen und

$$\mathfrak{u}(n) = \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid \bar{A}^T = -A\}$$

die Gruppe der schiefhermiteschen Matrizen. Der Dualraum  $\mathfrak{u}(n)^*$  kann mit der Menge der Hermiteschen Matrizen  $\mathcal{H}(n)$  identifiziert werden, mittels des linearen Isomorphismus

$$\begin{aligned}\Psi : \mathcal{H}(n) &\rightarrow \mathfrak{u}(n)^* \\ A &\mapsto \Psi(A) \quad \text{mit} \quad \Psi(A)B = \text{tr}(iAB)\end{aligned}$$

für  $B \in \mathfrak{u}(n)$ . Die Gruppe  $U(n)$  operiert auf  $\mathcal{H}(n)$  durch Konjugation  $\text{Ad}_G$  und auf  $\mathfrak{u}(n)^*$  durch Koadjungation  $\text{Ad}_G^*$ , wobei  $G$  ein Element aus  $U(n)$  darstellt. Bezüglich diesen Operationen ist die Abbildung  $\Psi$  eine  $U(n)$ -invariante Abbildung, es gilt also  $\text{Ad}_G^* \circ \Psi = \Psi \circ \text{Ad}_G$ , was sich mit  $A \in \mathcal{H}(n)$ ,  $B \in \mathfrak{u}(n)$  und  $G \in U(n)$  folgendermassen überprüfen lässt:

$$\begin{aligned}\langle \text{Ad}_G^*(\Psi(A)), B \rangle &= \langle \Psi(A), \text{Ad}_{G^{-1}}B \rangle = \Psi(A)G^{-1}BG \\ &= \text{tr}(iAG^{-1}BG) = \text{tr}(iGAG^{-1}B) \\ &= \Psi(G^{-1}AG)B = \langle \Psi(\text{Ad}_G(A)), B \rangle.\end{aligned}$$

Sei  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  und  $A \in \mathcal{H}(n)$  die diagonale Matrix, mit den Einträgen  $\lambda_i$  auf der Diagonalen. Sei  $G.A = \{UAU^{-1} \mid U \in U(n)\}$  die Bahn der Matrix  $A$  bezüglich der Konjugation. Mit der  $U(n)$ -äquivarianten Abbildung  $\Psi$  kann die symplektische Struktur auf der koadjungierten Bahn, welche im vorherigen Abschnitt untersucht wurde, auf  $G.A$  gebracht werden. Die symplektische Struktur auf der Bahn ist definiert für  $A \in \mathcal{H}(n)$  und  $a, b \in T_A(G.A)$  als

$$\omega_A(a, b) := \omega_{\Psi(A)}(d\Psi(a), d\Psi(b)) = \langle \Psi(A), [d\Psi(a), d\Psi(b)] \rangle.$$

Sei  $T$  die Untergruppe in  $U(n)$  mit  $T = \{A = (a_{ij}) \in U(n) \mid a_{ij} = 0 \text{ } i \neq j\}$ . Die Lie-Algebra  $\mathfrak{t}$  von  $T$  enthält also diagonale, schiefhermitesche Matrizen. Die Inklusionsabbildung  $\mathfrak{t} \hookrightarrow \mathfrak{u}(n)$  liefert eine Abbildung  $\varphi : \mathfrak{u}(n)^* \rightarrow \mathfrak{t}^*$ , welche eine Matrix  $A$  aus  $\mathcal{H}(n) \cong \mathfrak{u}(n)^*$  auf diejenige Matrix abbildet, welche dieselben Diagonaleinträge wie  $A$  hat. Hierbei wird  $\varphi(\Psi(A)) \in \mathfrak{t}^*$  mittels der Abbildung  $\Psi^{-1}$  mit einem Element aus  $\mathcal{H}(n)$  identifiziert. Die Momentabbildung bezüglich der Aktion der Gruppe  $T$  ist gegeben durch

$$G.A \xrightarrow{\Psi} G.\Psi(A) \xrightarrow{\mu} \mathfrak{u}(n)^* \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{t}^*,$$

wobei  $\mu$  die Momentabbildung bezüglich der Koadjungierten Aktion ist - also die Inklusionsabbildung. Somit ist die Momentabbildung  $\nu := \varphi \circ \mu \circ \Psi$  die Abbildung, die einer Matrix  $A \in G.A$  eine Funktion  $\phi_A \in \mathfrak{t}^*$  zuordnet mit

$$\phi_A(B) = \text{tr}(iAB) = \langle i \cdot \text{diag}(A), B \rangle$$

für  $B \in \mathfrak{t}$ . Die Momentabbildung  $\nu$  bildet also eine Hermitesche Matrix  $A$  auf  $i \cdot \text{diag}(A)$  ab.

Das Theorem von Atiyah-Guillemin-Sternberg besagt nun, dass  $\nu(G.A)$  ein konvexes Polytop der Fixpunkte der Torusaktion von  $T$  ist. Eine Matrix  $B \in G.A$  ist ein Fixpunkt bezüglich der Konjugation mit Elementen aus  $T$ , dann und nur dann, wenn  $B$  eine Diagonalmatrix ist. Die Diagonalmatrizen in  $G.A$  sind die Matrizen  $A_\sigma$  mit  $\lambda_\sigma = (\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})$  auf der Diagonalen für  $\sigma \in S_n$ . Es wird jede Permutation der Werte  $\lambda_i$  realisiert, da für die Weyl-Gruppe  $W(U(n)) = N_{U(n)}(T)/T = S_n$  gilt und die Operation von  $W(U(n))$  auf  $T$  somit der Permutation der Elemente einer Diagonalmatrix aus  $T$  entspricht. Die Matrizen  $A_\sigma$  erzeugen das konvexe Polytop  $\nu(G.A)$ , was das Theorem von Schur-Horn beweist.  $\square$

## 7 Dank

Zum Schluss meiner Arbeit möchte ich allen Personen danken, die mich im Rahmen meiner Masterarbeit begleitet und unterstützt haben. Ganz besonders möchte ich Herrn Prof. Dr. Anand Dessai danken für die umfängliche, hilfreiche Unterstützung und allen fachkenntlichen Antworten auf meine mathematischen Fragen. Ebenso möchte ich meinen Kommilitonen für ihre Hilfestellung während meines gesamten Studiums danken. Zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie und Freunden für die mannigfaltige Unterstützung bedanken.

## Literatur

- [1] Michael Francis Atiyah: *Convexity and commuting Hamiltonians* Bull. London Math. Soc., 14 1982, p. 1 - 15.
- [2] Michèle Audin: *Torus Actions on Symplectic Manifolds* Birkhäuser Verlag, 2004.
- [3] Alexander Barvinok: *A course in convexity* American Mathematical Soc, 2002.
- [4] Nicole Berline, Michèle Vergne: *Hamiltonian manifolds and moment map* Vorlesungsnotizen auf [nicole.berline.perso.math.cnrs.fr/cours-Fudan.pdf](http://nicole.berline.perso.math.cnrs.fr/cours-Fudan.pdf), 7. Juli 2016.
- [5] Theodor Bröcker, Klaus Jänich: *Einführung in die Differentialtopologie* Springer Verlag, 1973.
- [6] Thomas Delzant: *Hamiltoniens périodiques et image convexe de l'application moment* Bulletin de la Société Mathématique de France, 116 1988, p. 315 - 339.
- [7] Timothy E. Goldberg: *A little taste of symplectic geometry: The Schur-Horn theorem* Handout eines Referats auf [www.math.cornell.edu/~goldberg/Papers/SymplecticTaste.pdf](http://www.math.cornell.edu/~goldberg/Papers/SymplecticTaste.pdf), 7. Juli 2016.
- [8] Victor Guillemin, Allan Pollack: *Differential Topology* Prentice-Hall, 1974.
- [9] Dusa McDuff, Dietmar Salamon: *Introduction to Symplectic Topology* Oxford Science Publications, 1998.
- [10] John Willard Milnor: *Morse Theory* Princeton University Press, 1964.
- [11] Liviu Nicolaescu: *An invitation to Morse Theory* Springer, 2009.
- [12] Eduard Zehnder: *Lectures on Dynamical Systems* European Mathematical Society, 2010.

## Eidesstattliche Erklärung

Ich bestätige mit meiner Unterschrift, dass ich die Arbeit persönlich erstellt und dabei nur die aufgeführten Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Fribourg, 7. Juli 2016  
Ort, Datum

  
Adrian Müller