Lie Gruppen
Übungsblatt Nr. 2

Das Übungsblatt ist fakultativ und geht nicht in die Bewertung ein.
Sie haben die Möglichkeit bearbeitete Aufgaben zur Korrektur abzugeben.
Abgabe bis: Donnerstag 25. Oktober 2018

Aufgabe 1: Sei G ein zusammenhängende Lie Gruppe und H eine normale Untergruppe, die diskret ist (d.h. zu jedem $h \in H$ gibt es eine offene Umgebung U von G mit $U \cap H = \{h\}$). Zeigen Sie: H liegt im Zentrum von G, d.h. $gh = hg$ für alle $g \in G$ und $h \in H$.

Aufgabe 2: Zeigen Sie: Die Abbildungen

$$\exp : so(n) \to SO(n) \quad \text{und} \quad \exp : u(n) \to U(n)$$

sind surjektiv, aber $\exp : sl(2, \mathbb{R}) \to SL(2, \mathbb{R})$ nicht.

Aufgabe 3: Sei G die Lie Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen in der Diagonalen

$$G := \{A = (a_{ij}) \,|\, a_{ii} = 1 \,\forall\, i \text{ und } a_{ij} = 0 \text{ falls } i > j\} \subset GL(n, \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie die Lie Algebra von G.

Aufgabe 4: Sei G eine 1-dimensionale zusammenhängende Lie Gruppe. Zeigen Sie: $G \cong \mathbb{R}$ oder $G \cong S^1$.

Aufgabe 5: Sei G eine Lie Gruppe und $\mu : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$, die Multiplikation in G. Zeigen Sie:

$$\mu_* : LG \times LG \to LG, \quad \mu_*(X, Y) = X + Y.$$

Aufgabe 6: Sei $a : \mathbb{R}^2 \to M$ eine differenzierbare Abbildung mit $a(s, 0) = p$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to T_pM$ die Kurve $\gamma(s) = \frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} a(s, t)$. Wir identifizieren $T_{\gamma(0)}(T_pM)$ kanonisch mit T_pM. Die Kurve γ definiert einen Tangentialvektor $\gamma'(0) \in T_pM$. Sei $\varphi \in \mathcal{E}(p)$. Zeigen Sie:

$$\gamma'(0)(\varphi) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}_{|s=t=0} \varphi(a(s, t)).$$

Tipp: Ohne Einschränkung ist $(M, p) = (\mathbb{R}^n, 0)$ und φ linear.