Lie Gruppen
Übungsblatt Nr. 1

Das Übungsblatt ist fakultativ und geht nicht in die Bewertung ein.
Sie haben die Möglichkeit bearbeitete Aufgaben zur Korrektur abzugeben.
Abgabe bis: Donnerstag 11. Oktober 2018

Aufgabe 1: Zeigen Sie: $U(n) := \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \bar{A}^T = A^{-1}\}$ ist eine Lie Gruppe. Tipp: Zeigen Sie zum Beispiel, dass E_n ein regulärer Wert der Abbildung

$$f : M(n \times n, \mathbb{C}) \to \{B \in M(n \times n, \mathbb{C}) \mid \bar{B}^T = B\}, \quad A \mapsto \bar{A}^T \cdot A \quad \text{ist.}$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie:

1. Sind X, Y Vektorfelder auf der Mannigfaltigkeit M, so ist $[X, Y]$ ein Vektorfeld auf M.
2. Es gilt die Jacobi-Identität

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0 \text{ für alle Vektorfelder } X, Y, Z.$$

Aufgabe 3: Für G eine Lie Gruppe und X ein Vektorfeld auf G gilt:
X ist links-invariant $\iff$ $(l_x)_*(X) = X$ für alle $x \in G$.

Aufgabe 4: Zeigen Sie:

1. Die Lie Algebra von $SL(n,\mathbb{R})$ ist

$$sl(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \text{tr}\,(A) = 0\}.$$

2. Die Lie Algebra von $U(n)$ ist

$$u(n) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \mid \bar{A}^T = -A\}.$$