Skript zur Vorlesung

Lineare Algebra

Wintersemester 06/07

(Anand Dessai)

Version 04.06.2007

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

Mi 25.10.2006

Einführende Bemerkungen

1.1 Mengen und Abbildungen

Do 26.10.2006

Was ist eine Menge?

"Definition" 1.1 (frei nach Georg Cantor)**.** *"Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte - den Elementen - zu einem Ganzen."*

Eine endliche Menge hat die Form $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, wobei n eine natürliche Zahl ist. Zum Beispiel sind die folgenden Mengen endliche Mengen:

$$\{\text{Psychotherapeuten aus Fribourg}\}$$
$$\{2, 3, 5, 7, 11\} = \{3, 2, 5, 11, 7\}$$
$$\{4, 6, 8, 10\} = \{4, 4, 8, 8, 8, 6, 10, 6, 6\}$$

Auf die Reihenfolge der Elemente in einer Menge kommt es nicht an (siehe zweites Beispiel). Auch ändert sich die Menge nicht, wenn Elemente mehrfach aufgeführt werden (siehe drittes Beispiel). Die leere Menge bezeichnen wir mit dem Symbol $\emptyset$.

Anstatt alle Elemente der Menge aufzuzählen, kann die Menge auch durch eine Eigenschaft charakterisiert werden. Zum Beispiel ist

$$\{2, 3, 5, 7, 11\} = \{x \mid x \text{ Primzahl } \leq 11\}, \quad \emptyset = \{x \mid x \neq x\} \text{ und}$$
$$\{4, 6, 8, 10\} = \{x \mid x \text{ gerade Zahl und } 2 < x < 12\}$$

Wichtige Beispiele unendlicher Mengen sind die folgenden Zahlbereiche

natürliche Zahlen (nombres entiers naturels)	$\mathbb{N}$	$=$	$\{0, 1, 2, \ldots\}$
ganze Zahlen (nombres entiers)	$\mathbb{Z}$	$=$	$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$
rationale Zahlen (nombres rationnels)	$\mathbb{Q}$	$=$	$\{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0\}$
reelle Zahlen (nombres réels)	$\mathbb{R}$	$=$	Menge der Dezimalbrüche
positive reelle Zahlen (nombres reéls positif)	$\mathbb{R}_{>0}$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ etc.

Exkurs: Russelsches Paradoxon

Die oben gemachte naive Definition einer Menge ist problematisch. Um dies zu illustrieren betrachten wir das folgende Gedankenspiel:

Sei P ein Fribourger Psychotherapeut, der genau die Fribourger therapiert, die sich nicht selber therapieren.

Therapiert sich P selber?

$$P \text{ therapiert sich selber } \Rightarrow P \text{ therapiert sich nicht selber } \lightning$$

$$P \text{ therapiert sich nicht selber } \Rightarrow P \text{ therapiert sich selber } \lightning$$

In jedem Fall erhalten wir einen Widerspruch (mit $\lightning$ bezeichnet). Die Person P gibt es folglich nicht. Diese Situation lässt sich folgendermassen auf Mengen übertragen: Sei

$$\mathcal{A} := \{X \mid X \text{ ist eine Menge mit } X \notin X\}$$

Dann schliessen wir ähnlich wie zuvor:

$$\mathcal{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \notin \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \notin \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{A}$$

Folglich ist $\mathcal{A}$ keine Menge. Dieses Paradoxon, welches auf Russel zurückgeht, wird aufgelöst, indem eine Hierarchie eingeführt wird, deren unterste Stufe die Mengen sind und exotischere Objekte, wie $\mathcal{A}$, von höherer Stufe sind.

Definition 1.2. *Seien X und X' Mengen. X' heisst* **Teilmenge** (sous-ensemble) *von X, $X' \subset X$, wenn gilt:*

$$x \in X' \Rightarrow x \in X$$

Zwei Mengen X und Y sind gleich, wenn $X \subset Y$ und $Y \subset X$.

Beispiele 1.3. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Definition 1.4.

1. *Für Mengen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sei*

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n := \{x \mid x \in X_i \text{ für ein } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

die **Vereinigung** (union) *der Mengen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ und*

$$X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n := \{x \mid x \in X_i \text{ für alle } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

der **Durchschnitt** (intersection) *der Mengen $X_1, X_2, \ldots, X_n$.*

2. *Sei I eine Menge und X_i eine Menge für jedes $i \in I$.*

$$\bigcup_{i \in I} X_i := \{x \mid x \in X_i \text{ für ein } i \in I\}$$

heisst die **Vereinigung** (union) *der Mengen X_i, $i \in I$, und*

$$\bigcap_{i \in I} X_i := \{x \mid x \in X_i \text{ für alle } i \in I\}$$

heisst der **Durchschnitt** (intersection) *der Mengen X_i, $i \in I$.*

Definition 1.5. *Für Mengen X und Y sei*

$$X \setminus Y := \{x \in X \mid x \notin Y\} \quad (\text{ man sagt } X \textbf{ minus } Y \; (X \text{ moins } Y)\ )$$

die **Differenzmenge** (différence). *Falls Y Teilmenge von X ist, so heisst $X \setminus Y$ auch das* **Komplement** (complément) *von Y in X.*

Definition 1.6. *Seien X und Y Mengen.*

1. *Eine* **Abbildung** (application) *von X nach Y ist eine Vorschrift f, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x)$ aus Y zuordnet. Wir schreiben*
$$f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x) \qquad \text{oder} \qquad X \xrightarrow{f} Y$$

2. *Zwei Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ sind gleich, wenn $f(x) = g(x)$ für jedes $x \in X$ gilt.*

3. *Sei $Map(X, Y) := \{f : X \to Y\}$ die Menge der Abbildungen von X nach Y.*

Sei $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Wir bemerken, dass $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \pm\sqrt{x}$, keine Abbildung ist, da einer positiven reellen Zahl x mehr als ein Wert zugeordnet wird.

Definition 1.7. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst*

1. **injektiv** (injective), *wenn gilt: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.*

2. **surjektiv** (surjective), *wenn es für jedes $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $y = f(x)$ gibt.*

3. **bijektiv** (bijective), *wenn f injektiv und surjektiv ist.*

Ist f bijektiv, so wird die **Umkehrabbildung** (application inverse)

$$Y \to X, \quad f(x) \mapsto x$$

mit f^{-1} bezeichnet.

Mi 1.11.2006

Allerheiligen

Do 2.11.2006

Beispiele 1.8. 1. *Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -5x$, ist bijektiv. Die Umkehrabbildung ist die Abbildung $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x/5$.*

2. *$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2$, *ist weder injektiv noch surjektiv.*

3. $\mathbb{N} \xrightarrow{h} \mathbb{N}, a \mapsto a + 1$, *ist injektiv aber nicht surjektiv.*

4. $\mathbb{R} \to S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, *ist surjektiv aber nicht injektiv.*

Definition 1.9. *Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, M eine Teilmenge von X und N eine Teilmenge von Y.*

1. $f(M) := \{f(x) \mid x \in M\} \subset Y$ *heisst das* **Bild** (image) *von M.*

2. $f^{-1}(N) := \{x \in X \mid f(x) \in N\} \subset X$ *heisst das* **Urbild** (pre-image) *von N.*

3. $f_{|M} : M \to Y$, $x \mapsto f(x)$, *heisst die* **Einschränkung** (restriction) *der Abbildung f auf die Teilmenge M.*

Beispiel 1.10. *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Dann ist $f^{-1}(\{1\}) = S^1$ der Kreis vom Radius 1, $f^{-1}([0, 1]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ die abgeschlossene Scheibe vom Radius 1, $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$ etc.*

Für zwei Teilmengen A, B der reellen Zahlen ist $A \times B$ die Menge aller 2-Tupel $\{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$. Allgemeiner machen wir für beliebige Mengen die folgende Definition.

Definition 1.11.

1. *Das* **kartesische Produkt** (produit cartésien) *der Mengen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ist die Menge*

   $$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n := \{x : \{1, \ldots, n\} \to X_1 \cup \ldots \cup X_n \mid x(i) \in X_i \; \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

   Notation: Statt $x(i)$ schreiben wir x_i und die Elemente im kartesischen Produkt schreiben wir als Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$,

   $$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i \; \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

   Weiter sei $X^n := X \times X \times \ldots \times X$ (n Faktoren), z.B. ist

   $$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_i \in \mathbb{R} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \right\}$$

2. *Sei I eine beliebige Menge und sei X_i eine Menge für jedes $i \in I$. Dann ist das* **kartesische Produkt** *der Mengen X_i, $i \in I$, die Menge*

   $$\bigtimes_{i \in I} X_i := \{x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid x(i) \in X_i\} = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i\}$$

Ist $X_i = X$ für alle $i \in I$, so schreiben wir auch X^I statt $\bigtimes_{i \in I} X_i$. Insbesondere beschreibt $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller reellwertigen Folgen.

1.2 Gruppen

Definition 1.12. *Eine* **Gruppe** (groupe) $(G, *)$ *ist eine Menge* G *zusammen mit einer Abbildung (Verknüpfung,* (loi intérieure) *)*

$$*: G \times G \to G, \quad (a, b) \mapsto *(a, b) =: a * b$$

mit den Eigenschaften:

1. $(a*b)*c = a*(b*c)$ *für alle* $a, b, c \in G$ *(Assoziativgesetz* (loi associative) *).*

2. *es gibt ein Element* $e \in G$, **neutrales Element** (élément neutre), *mit* $e * a = a$ *für alle* $a \in G$*.*

3. *für jedes* $a \in G$ *gibt es ein* $a' \in G$, **inverses Element** (élément inverse) *zu* a*, mit* $a' * a = e$*.*

Beispiele 1.13.

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ *sind Gruppen (* 0 *ist neutrales Element und* $-a$ *ist Inverses zu* a *).*

2. $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *bildet zusammen mit der Multiplikation als Verknüpfung,* $a * b := a \cdot b$*, eine Gruppe (hierbei ist* $e = 1$ *und* $a' = a^{-1} = 1/a$ *). Weiter sind* $(\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ *und* $(\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \cdot)$ *Gruppen.*

3. $(\mathbb{R}^n, +)$,

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

ist eine Gruppe. Hier ist das neutrale Element $e = 0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *und das Inverse zu* $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *ist* $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$.

Definition 1.14. *Eine Gruppe* $(G, *)$ *heisst* **abelsch** (abélian) *oder* **kommutative** (commutatif), *wenn* $a * b = b * a$ *für alle* $a, b \in G$ *gilt.*

Die obigen Beispiele sind alle kommutativ. Um eine nicht abelsche Gruppe zu finden, müssen wir uns etwas anstrengen.

Definition 1.15.

1. *Für Abbildungen* $f : X \to Y$ *und* $h : Y \to Z$ *von Mengen heisst* $h \circ f : X \to Z$, $x \mapsto h(f(x))$, *die* **Komposition** (composition) *(oder* **Hintereinanderschaltung** *) von* f *und* h*.*

2. *Sei* $S(X) := \{f \in Map(X, X) \mid f \text{ bijektiv} \}$ *die Menge der bijektiven Abbildungen von* X *nach* X*.*

Beispiel 1.16 (Übungsaufgabe)**.** $(S(X), \circ)$ *ist eine Gruppe.*

Definition 1.17. *Für $X := \{1, 2, \dots, n\}$ heisst $S_n := S(X)$* **Permutationsgruppe** (groupe de permutation)*. Ihre Elemente heissen* **Permutationen** (permutations)*.*

Bemerkung 1.18. *$(S_3, \circ)$ ist nicht abelsch.*

Beweis: *Sei $a : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, $a(1) := 2$, $a(2) := 1$, $a(3) := 3$ und sei $b : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, $b(1) := 1$, $b(2) := 3$, $b(3) := 2$. Dann gilt für die Elemente a, b aus S_3: $a \circ b \neq b \circ a$, da $(a \circ b)(1) = 2 \neq 3 = (b \circ a)(1) = 3$.* ■

Lemma 1.19. *Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Dann gilt:*

1. *Das neutrale Element $e \in G$ ist eindeutig bestimmt und es gilt $a * e = a$ für alle $a \in G$.*
2. *Das Inverse a' zu a ist eindeutig bestimmt und es gilt $a * a' = e$.*

Der Beweis zerfällt in 4 Schritte.

Beweis: Beh. 1: $a * a' = e$

Sei a'' Inverses zu a', also $a'' * a' = e$. Dann gilt unter Verwendung des Assoziativgesetzes:

$$a * a' = e * (a * a') = (a'' * a') * (a * a') = a'' * (a' * (a * a'))$$
$$= a'' * ((a' * a) * a') = a'' * (e * a') = a'' * a' = e \quad \checkmark$$

Beh. 2: $a * e = a$

$$a * e = a * (a' * a) = (a * a') * a = e * a = a \quad \checkmark$$

Die dritte Gleichung folgt aus der ersten Behauptung.

Beh. 3: e ist eindeutig bestimmt.

Sei $\tilde{e} \in G$ mit $\tilde{e} * a = a$ für alle $a \in G$. Dann folgt:

$$e = \tilde{e} * e = \tilde{e} \quad \checkmark$$

Die erste Gleichung gilt nach Voraussetzung an $\tilde{e}$ und die zweite folgt aus der letzten Behauptung.

Beh. 4: Das Inverse a' zu a ist eindeutig bestimmt.

Sei $\tilde{a}' \in G$ mit $\tilde{a}' * a = e$. Dann folgt:

$$\tilde{a}' = \tilde{a}' * e = \tilde{a}' * (a * a') = (\tilde{a}' * a) * a' = e * a' = a' \quad \checkmark$$

Die erste Gleichung folgt aus der zweiten Behauptung, die zweite Gleichung folgt aus der ersten Behauptung, die dritte Gleichung benutzt das Assoziativgesetz und die vierte Gleichung gilt nach Voraussetzung an $\tilde{a}'$. ■

Mi 8.11.2006

Notation 1.20. *Wird die Verknüpfung in einer Gruppe mit $\cdot$ bezeichnet, so schreiben wir für das Inverse von a auch a^{-1} oder $1/a$. Wird die Verknüpfung in einer Gruppe mit $+$ bezeichnet, so schreiben wir für das Inverse von a auch $-a$ und für das neutrale Element 0.*

Übungsaufgabe 1.21. *In einer Gruppe $(G, \cdot)$ gilt:*

1. $(a^{-1})^{-1} = a$ *für alle* $a \in G$.
2. $ax = a\tilde{x} \Rightarrow x = \tilde{x}$ *und* $ya = \tilde{y}a \Rightarrow y = \tilde{y}$ *für alle* $a, x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in G$.

Definition 1.22. *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge G' heisst* **Untergruppe** (sous-groupe)*, wenn gilt:*

1. $G \neq \emptyset$.
2. $a, b \in G \Rightarrow ab \in G$.
3. $a \in G \Rightarrow a^{-1} \in G$.

Bemerkung 1.23 (Untergruppen sind Gruppen)**.** *Ist G' eine Untergruppe von G, so schränkt sich die Verknüpfung $\cdot$ der Gruppe G zu eine Abbildung $G' \times G' \xrightarrow{\cdot} G'$ ein, mit welcher G' eine Gruppe ist.*

Beispiele 1.24.

1. $(\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{Q}, +) \subset (\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot) \subset (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot) \subset (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ *(mit $\mathbb{Q}_{>0}$ bzw. $\mathbb{R}_{>0}$ werden die positiven rationalen bzw. positiven reellen Zahlen bezeichnet).*
2. *Für $m \in \mathbb{N}$ sei $m\mathbb{Z} := \{m \cdot a \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Z.B. ist*

$$2\mathbb{Z} = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6 \dots\}$$

die Menge der geraden Zahlen. Die Menge der geraden Zahlen bildet eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$, da sie nicht leer ist und abgeschlossen bzgl. der Addition (gerade + gerade ist gerade) und abgeschlossen bzgl. Inversenbildung (-gerade ist auch gerade) ist. Allgemeiner lässt sich leicht zeigen:

$$(m\mathbb{Z}, +) \text{ ist eine Untergruppe von } (\mathbb{Z}, +)$$

Definition 1.25.

1. *Eine Abbildung $\varphi : G \to H$, von Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \bullet)$ heisst* **Homomorphismus** (homomorphisme) *wenn für alle $a, b \in G$ gilt: $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \bullet \varphi(b)$.*
2. *Ein Homomorphismus $\varphi : G \to H$ heisst* **Isomorphismus** (isomorphisme)*, wenn φ bijektiv ist. In diesem Fall schreiben wir $\varphi : G \xrightarrow{\cong} H$ oder einfach nur $G \cong H$.*

Beispiele 1.26.

1. $\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}$, $a \mapsto 2a$, *ist eine injektiver Homomorphismus, aber nicht surjektiv. Ebenso ist die Inklusion $2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $a \mapsto a$, ein injektiver, nicht surjektiver Homomorphismus (in all diesen Fällen sei die Verknüpfung die gewöhnliche Addition ganzer Zahlen).*
2. $\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} 2\mathbb{Z}$, $a \mapsto 2a$, *ist ein Isomorphismus,* $\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}$.

3. *Die Exponentialabbildung*

$$\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot), \quad x \mapsto e^x$$

ist ein Isomorphismus. Die Homomorphismus-Eigenschaft ist gerade das Exponentialgesetz $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

$$\exp(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Weiter ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ *bijektiv. Die Umkehrabbildung ist der natürliche Logarithmus* $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$.

4. *Die Abbildung* $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $x \mapsto x^2$, *ist kein Homomorphismus, da z.B.* $(2 + 3)^2$ *nicht gleich* $2^2 + 3^2$ *ist. Die Abbildung* $(\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $x \mapsto x^2$, *ist ein Homomorphismus, der weder injektiv noch surjektiv ist.*

5. *Sei* G *die Gruppe, welche von der Drehungen im Ursprung* $0 \in \mathbb{R}^2$ *und den Spiegelungen entlang Geraden durch* $0 \in \mathbb{R}^2$ *erzeugt wird. Die Verknüpfung auf* G *sei die Komposition von Abbildungen. Also besteht* G *aus den Abbildungen* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *die sich als endliche Komposition von solchen Drehungen und Spiegelungen beschreiben lassen. Sei* H *die Teilmenge von* G, *welche aus den Abbildungen besteht, die das reguläre Dreieck (mit Zentrum* $0 \in \mathbb{R}^2$*) in sich überführt. Dann ist* H *eine Untergruppe von* G *und* H *ist isomorph zu der Permutationsgruppe* S_3.

Lemma 1.27. *Sei* $\varphi : G \to H$ *ein Homomorphismus von Gruppen. Dann gilt:*

1. $\varphi(e) = e$, $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

2. *Das* **Bild** (image) $\operatorname{im}(\varphi) := \{\varphi(g) \mid g \in G\}$ *ist eine Untergruppe von* H.

3. *Der* **Kern** (noyau) $\ker(\varphi) := \{g \in G \mid \varphi(g) = e\}$ *ist eine Untergruppe von* G.

4. *Ist* φ *ein Isomorphismus, so ist die Umkehrabbildung* $\varphi^{-1} : H \to G$ *ein Isomorphismus von Gruppen.*

Beweis: Ad 1.: $\varphi(e) = \varphi(e \cdot e) = \varphi(e) \cdot \varphi(e) \Rightarrow e = \varphi(e) \quad \checkmark$

$$\varphi(a^{-1}) \cdot \varphi(a) = \varphi(a^{-1} \cdot a) = \varphi(e) = e.$$

Also ist $\varphi(a^{-1})$ Inverses zu $\varphi(a)$ und somit $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$. $\checkmark$

Ad 2.: Das Bild $\operatorname{im}(\varphi)$ ist nicht leer, da $e = \varphi(e) \in \operatorname{im}(\varphi)$. $\checkmark$

Seien $a_1, a_2 \in \operatorname{im}(\varphi)$. Dann gibt es $g_i \in G$ mit $\varphi(g_i) = a_i$ für $i = 1, 2$. Folglich ist $a_1 \cdot a_2 = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2) = \varphi(g_1 \cdot g_2)$ im Bild von φ. $\checkmark$

Schliesslich wähle für $a \in \operatorname{im}(\varphi)$ ein $g \in G$ mit $\varphi(g) = a$. Da φ ein Homomorphismus ist, ist $a^{-1} = \varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1})$ im Bild von φ. $\checkmark$

Ad 3. und Ad 4.: Übungsaufgabe. ∎

1.3 Ringe und Körper

In der linearen Algebra werden nicht nur Gruppen, sondern auch Mengen mit zwei Verknüpfungen benötigt. Ein wichtiges Beispiel hierfür sind die ganzen Zahlen, die bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe bilden, aber bezüglich der Multiplikation im Allgemeinen kein Inverses besitzen (z.B. hat 2 kein Inverses in $\mathbb{Z}$ bezüglich der Multiplikation).

Definition 1.28. *Eine Menge R zusammen mit zwei Abbildungen (Verknüpfungen)*

$$+: \; R \times R \to R, \quad (a,b) \mapsto +(a,b) =: a+b \quad \textit{(Addition)}$$

$$\cdot: \; R \times R \to R, \quad (a,b) \mapsto \cdot(a,b) =: a \cdot b \quad \textit{(Multiplikation)}$$

heisst **Ring** (anneau)*, wenn gilt:*

1. *$(R,+)$ ist eine abelsche Gruppe.*
2. *Für alle $a,b,c \in R$ ist $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Assoziativgesetz).*
3. *Für alle $a,b,c \in R$ gelten die Distributivgesetze*

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Hierbei soll - wie im Alltag auch - gelten, dass Multiplikation vor Addition geht, also z.B. $a \cdot b + a \cdot c$ für $(a \cdot b) + (a \cdot c)$ steht.

Ein Ring R heisst **kommutativ** (commutatif)*, wenn*

$$a \cdot b = b \cdot a$$

für alle $a,b \in R$ gilt. Ein Element $1 \in R$ heisst **Einselement** (élément unitaire)*, wenn*

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

für alle $a \in R$ gilt. Der Ring R heisst **nullteilerfrei** (anneau intègre)*, wenn für alle $a,b \in R$ gilt:*

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \textit{ oder } b = 0$$

Nicht jeder Ring besitzt ein Einselement, wie das Beispiel des Ringes $(2\mathbb{Z},+,\cdot)$ zeigt.

Beispiel 1.29 (Restklassen modulo m)**.** *Sei m eine natürliche Zahl, $m \geq 1$. Zwei ganze Zahlen r,s heissen* **kongruent modulo** m (congruent modulo m)*, wenn $r-s$ durch m teilbar ist. Wir schreiben dann $r \equiv s \bmod m$. Kongruenz modulo m definiert eine Äquivalenzrelation*

$$r \sim s \iff r \equiv s \bmod m$$

mit m Äquivalenzklassen, die Klassen in denen $0,1,\ldots,m-1$ liegen.

Exkurs: Äquivalenzrelation

Eine **Relation** (relation) auf einer Menge X ist eine Teilmenge $T \subset X \times X$.
Notation: Wir schreiben $a \sim b \iff (a, b) \in T$.
Die Relation T heisst **Äquivalenzrelation** (relation d'équivalence), wenn gilt:

- $x \sim x$ für alle $x \in X$ (Relation ist reflexiv).
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ für alle $x, y \in X$ (Relation ist symmetrisch).
- $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ für alle $x, y, z \in X$ (Relation ist transitiv).

Eine Äquivalenzrelation ist also eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Die **Äquivalenzklasse** (classe d'équivalence) zu $x \in X$ ist die Teilmenge $\{y \in X \mid y \sim x\}$ und wird oft mit $[x]$ bezeichnet. Ist die Relation eine Äquivalenzrelation, so ist X die disjunkte Vereinigung der verschiedenen Äquivalenzklassen (Übungsaufgabe).

In unserem Beispiel ist $T \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die Teilmenge gegeben durch

$$(r, s) \in T \iff m \text{ teilt } r - s$$

Statt m teilt $r-s$ schreiben wir $m \mid r-s$. Direktes Nachrechnen zeigt, dass dies eine Äquivalenzrelation ist und die Äquivalenzklassen durch $[0], [1], \dots [m-1]$ gegeben sind (z.B. gibt es für $m = 2$ genau zwei Äquivalenzklassen, die Menge aller geraden Zahlen $[0]$ und die Menge aller ungeraden Zahlen $[1]$).

Do 9.11.2006

Sei $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ die Menge der Äquivalenzklassen. Definiere

$$+ : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \quad ([a], [b]) \mapsto [a + b]$$

$$\cdot : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \quad ([a], [b]) \mapsto [a \cdot b]$$

Diese Abbildungen sind wohldefiniert (d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten) und definieren auf $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ die Struktur eines kommutativen Ringes mit Einselement $[1]$ (Übungsaufgabe).

Der Ring $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ heisst der **Ring der Restklassen modulo** m (anneau des entiers modulo m).

Bemerkung 1.30. *Der Ring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn m eine Primzahl ist.*

Beweis: ($\Leftarrow$) Sei m eine Primzahl und $[a] \cdot [b] = [0]$. Dann gilt:

$$[a] \cdot [b] = [0] \Rightarrow [a \cdot b] = [0] \Rightarrow m \mid a \cdot b$$

Da m eine Primzahl ist, folgt $m \mid a$ oder $m \mid b$, also $[a] = [0]$ oder $[b] = [0]$. ✓

($\Rightarrow$) Angenommen m ist keine Primzahl. Dann gibt es ganze Zahlen a, b mit $1 < a$, $1 < b$ und $a \cdot b = m$, insbesondere ist $a < m$ und $b < m$. Also gilt

$$[a] \neq [0], \quad [b] \neq [0] \text{ und } [a] \cdot [b] = [a \cdot b] = [m] = [0]$$

Dies steht im Widerspruch zur Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Also ist m eine Primzahl. ✓ ∎

Beispiel 1.31. *Sei X eine nichtleere Menge und sei $R := Map(X, \mathbb{R})$ zusammen mit den Abbildungen*

$$+ : R \times R \to R, \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$\cdot : R \times R \to R, \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

Dann ist R ein kommutativer Ring mit Einselement $1 : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$.

Definition 1.32. *Sei R ein Ring. Eine Teilmenge $R' \subset R$ heisst* **Unterring** (sous-anneau)*, wenn*

1. *$(R', +)$ eine Untergruppe von $(R, +)$ ist und*
2. *für alle $a, b \in R'$ gilt: $a \cdot b \in R'$.*

Beispiele 1.33.

1. *$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.*
2. *Sei $R := Map([0,1], \mathbb{R})$ und $R' := \{f \in R \mid f(0) = 0\}$. Dann ist R' ein Unterring von R.*
3. *$m\mathbb{Z}$ ist ein Unterring von $\mathbb{Z}$.*

Definition 1.34. *Eine Abbildung $\varphi : R \to S$ von Ringen heisst* **Homomorphismus** *(von Ringen), wenn für alle $a, b \in R$ gilt:*

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \text{und} \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Beispiele 1.35.

1. *Ist R' ein Unterring des Ringes R, so ist die Inklusionsabbildung $R' \hookrightarrow R$, $a \mapsto a$, ein injektiver Ringhomomorphismus.*
2. *Für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, ist*

   $$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \quad a \mapsto [a]$$

   ein surjektiver Ringhomomorphismus.
3. *Für $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, ist*

   $$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}, \quad [a] \mapsto [n \cdot a]$$

   ein injektiver Ringhomomorphismus.
4. *Sei Y eine nichtleere Teilmenge der Menge X. Dann ist*

   $$Map(X, \mathbb{R}) \to Map(Y, \mathbb{R}), \quad f \mapsto f_{|Y}$$

   ein surjektiver Ringhomomorphismus, der das Einselement auf das Einselement abbildet.

Für die Ringe $R = \mathbb{Q}$ oder $R = \mathbb{R}$ gilt sogar, dass $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe ist. Ringe mit dieser Eigenschaft heissen Körper.

Definition 1.36. *Eine Menge K zusammen mit zwei Abbildungen*

$$+ : \; K \times K \to K, \quad (a,b) \mapsto +(a,b) =: a + b$$

$$\cdot : \; K \times K \to K, \quad (a,b) \mapsto \cdot(a,b) =: a \cdot b$$

heisst **Körper** (corps)*, wenn gilt:*

1. *$(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe.*
2. *Für alle $a, b \in K^* := K \setminus \{0\}$ ist $a \cdot b \in K^*$.*
3. *$(K^*, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.*
4. *Für alle $a, b, c \in K$ ist*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Das neutrale Element bzgl. der Addition wird mit 0 bezeichnet, das Inverse von $a \in K$ bzgl. der Addition wird mit $-a$ bezeichnet. Das neutrale Element bzgl. der Multiplikation wird mit 1 bezeichnet, das Inverse von $a \in K^*$ bzgl. der Multiplikation wird mit a^{-1} oder $1/a$ bezeichnet.

Bemerkungen 1.37.
1. *Ein Körper ist ein kommutativer, nullteilerfreier Ring $\neq \{0\}$ mit Einselement, in dem jedes Element $a \neq 0$ ein Inverses a^{-1} besitzt.*
2. *In einem Körper K ist $0 \neq 1$, insbesondere hat K mindestens zwei Elemente.*

In einem Körper gelten die folgenden

Rechenregeln 1.38.
1. *$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.*
2. *$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$.*
3. *$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$*
4. *Ist $a \neq 0$ so gilt: $ax = a\tilde{x} \Rightarrow x = \tilde{x}$ und $ya = \tilde{y}a \Rightarrow y = \tilde{y}$*

Beispiele 1.39. *$\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind Körper.*

Definition 1.40. *Sei K ein Körper. Eine Teilmenge $K' \subset K$ mit $K' \neq \{0\}$ heisst* **Unterkörper** (sous-corps)*, wenn*

1. *K' ein Unterring von K ist und*
2. *für alle $a \in K', a \neq 0$ gilt: $a^{-1} \in K'$.*

Es folgt, dass der Unterkörper K' das Einselement enthält und $(K', +, \cdot)$ ein Körper ist.

Definition 1.41. *Eine Abbildung $\varphi : K \to L$ von Körpern heisst* **Homomorphismus** *(von Körpern), wenn φ ein Ringhomomorphismus ist mit $\varphi(1) = 1$.*

Exkurs 1.42. *Komplexe Zahlen*

Sei $\mathbb{C}$ die Menge der reellen 2-Tupel, $\mathbb{C} := \mathbb{R}\times\mathbb{R} := \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, zusammen mit den Abbildungen

$$+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (a,b) + (\tilde{a} + \tilde{b}) := (a+\tilde{a}, b+\tilde{b})$$

$$\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (a,b) \cdot (\tilde{a} + \tilde{b}) := (a\cdot\tilde{a} - b\cdot\tilde{b}, a\cdot\tilde{b} + b\cdot\tilde{a})$$

Es folgt leicht, dass $(\mathbb{C},+)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 := (0,0)$ ist. Tatsächlich ist $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ein Körper (Übungsaufgabe), d.h. zusätzlich ist $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ eine abelsche Gruppe und es gelten die Distributivgesetze (siehe Definition 1.36).
Wir identifizieren die reellen Zahlen mit einer Teilmenge der komplexen Zahlen via $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto (x,0)$. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass ι ein injektiver Homomorphismus von Körpern ist, also $\mathbb{R}$ via ι als Unterkörper von $\mathbb{C}$ angesehen werden kann.
Da $(1,0)\cdot(a,b) = (a,b)$ für alle (a,b) gilt, ist $1 := (1,0)$ das neutrale Element bzgl. der Multiplikation. Da $(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$, kann $i := (0,1)$ als komplexe Wurzel von -1 aufgefasst werden. Wir schreiben daher auch $i = \sqrt{-1}$. Insbesondere hat das Polynom x^2+1 in $\mathbb{C}$ Nullstellen.
Jede komplexe Zahl lässt sich eindeutig in der Form $a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$, schreiben. Addition und Multiplikation übersetzen sich zu

$$(a+ib) + (\tilde{a} + i\tilde{b}) = (a+\tilde{a}) + i(b+\tilde{b})$$

$$(a+ib)(\tilde{a} + i\tilde{b}) = (a\cdot\tilde{a} - b\cdot\tilde{b}) + i(a\cdot\tilde{b} + b\cdot\tilde{a})$$

Das Inverse zu $a+ib \neq 0$ bzgl. der Multiplikation ist $(a^2+b^2)^{-1}\cdot(a-ib)$.

Die Abbildung

$$c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z = a+ib \mapsto \overline{z} := a - ib,$$

ist ein Körperisomorphismus und heisst Konjugationsabbildung. Interpretieren wir eine komplexe Zahl $z = a+ib$ als ein Vektor in der xy-Ebene mit Koordinaten (a,b), so ist c die Spiegelung entlang der x-Achse. Das Inverse zu $z = a+ib \neq 0$ bzgl. der Multiplikation ist $z^{-1} = \overline{z}/(z\cdot\overline{z})$.

Nach dem Satz von Pythagoras ist die Länge $|z|$ des Vektors z gleich $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\cdot\overline{z}}$.

Die Multiplikation lässt sich einfacher mittels Polarkoordinaten verstehen. Einer komplexen Zahl $z \neq 0$ ordnen wir die Länge $r := |z|$ und den Winkel α zur x-Achse zu, $z \mapsto (r,\alpha)$. Es ist dann $z = r\cdot(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$. Ist $\tilde{z}$ eine weitere komplexe Zahl $\neq 0$ mit Polarkoordinaten $(\tilde{r},\tilde{\alpha})$, so hat das Produkt $z\cdot\tilde{z}$ die Polarkoordinaten $(r\cdot\tilde{r}, \alpha+\tilde{\alpha})$.

Eine besondere Eigenschaft der komplexen Zahlen beschreibt der

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes nichtkonstante Polynom $p(z) = a_0 + a_1\cdot z + \ldots + a_n\cdot z^n$, $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{C}$, hat in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.

Do 16.11.2006

Wir wollen nun Beispiele von endlichen Körpern konstruieren.

Beispiel 1.43. *Ist p eine Primzahl, so ist der Ring $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Restklassen modulo p ein Körper.*

Aufgrund der Bemerkung 1.30 wissen wir schon, dass $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ nullteilerfrei ist. Es bleibt zu zeigen, dass jedes Element $\neq 0$ bzgl. der Multiplikation ein Inverses besitzt. Dies folgt aus dem folgenden allgemeinen Lemma.

Lemma 1.44. *Sei R ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit Einselement. Hat R nur endlich viele Elemente, so ist R ein Körper.*

Beweis: Wir müssen zeigen: Für jedes $a \in R$, $a \neq 0$, gibt es ein Element $x \in R$ mit $x \cdot a = 1$. Hierzu betrachten wir die Abbildung $f : R \to R$, $x \mapsto x \cdot a$. Die Abbildung ist injektiv, da:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x \cdot a = y \cdot a \Rightarrow (x - y) \cdot a = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} (x - y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Bei der Implikation $(*)$ wird benutzt, dass R nullteilerfrei und $a \neq 0$ ist.

Nun ist R nach Voraussetzung endlich und somit jede injektive Selbstabbildung $R \to R$ auch surjektiv. Insbesondere ist f surjektive. Also liegt 1 im Bild von f, d.h. es gibt ein Element x mit $x \cdot a = f(x) = 1$. ■

Kapitel 2

Vektorräume

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für p eine Primzahl). Bevor wir Vektorräume einführen, zunächst eine Notation, die es unter anderem erlaubt Spaltenvektoren platzsparend zu notieren.

Notation: (Transponieren von Spalten- und Zeilenvektoren)
Definiere

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}^T := (v_1, \ldots, v_n) \text{ und } (v_1, \ldots, v_n)^T := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Ein wichtiges Beispiel für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum ist das folgende Beispiel.

Beispiel 2.1. *Sei $V := \mathbb{K}^n = \{(v_1, \ldots, v_n)^T \mid v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}\}$. Die Elemente von V heissen Vektoren. Addition von Vektoren und Multiplikation mit Körperelementen wird komponentenweise definiert:*

$$V \times V \xrightarrow{+} V, \quad v + w := (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)^T \quad \textit{(Addition)}$$

für Vektoren $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ und $w = (w_1, \ldots, w_n)^T$ und

$$\mathbb{K} \times V \xrightarrow{\cdot} V, \quad \lambda \cdot v := (\lambda \cdot v_1, \ldots, \lambda \cdot v_n)^T \quad \textit{(Multiplikation)}$$

für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$.

Offensichtlich ist $(V, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 = (0, \ldots, 0)^T$. Das Inverse zum Vektor v ist der Vektor $-v = (-v_1, \ldots, -v_n)^T$. Die folgenden Rechenregeln lassen sich leicht zeigen.

Für alle Vektoren $v, w \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w, \quad (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v, \quad 1 \cdot v = v.$$

Wir nehmen diese Eigenschaften als Ausgangspunkt für die Definition des Vektorraums.

Definition 2.2. *Ein* **$\mathbb{K}$-Vektorraum** ($\mathbb{K}$-espace vectoriel) *ist eine Menge V zusammen mit Abbildungen (Verknüpfungen)*

$$+: \ V \times V \to V, \quad (v, w) \mapsto v + w \quad \textit{(Addition)}$$

$$\cdot: \ \mathbb{K} \times V \to V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \quad \textit{(skalare Multiplikation)}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. *$(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe (das neutrale Element bezeichnet wir mit 0_V oder einfach nur mit 0, das Inverse zu v bezeichnen wir mit $-v$).*

2. *Für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt*

   $$\lambda\cdot(v+w) = \lambda\cdot v+\lambda\cdot w, \quad (\lambda+\mu)\cdot v = \lambda\cdot v+\mu\cdot v, \quad \lambda\cdot(\mu\cdot v) = (\lambda\cdot\mu)\cdot v, \quad 1\cdot v = v,$$

   wobei 1 das neutrale Element in der Gruppe $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ bezeichnet.

Die Elemente in V heissen **Vektoren** (vecteurs)*, die Elemente von $\mathbb{K}$ heissen* **Skalare** (scalaires)*. Einen $\mathbb{K}$-Vektorraum nennen wir auch Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$.*

Beispiele 2.3.

1. *$\mathbb{K}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.*

2. *$\mathbb{C}$ ist nicht nur ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, sondern auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (bzgl. Addition von komplexen Zahlen und Multiplikation mit reellen Zahlen). Ebenso kann $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ aufgefasst werden.*

3. *Die Menge der $\mathbb{K}$-wertigen (2×2)-Matrizen $V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{K} \right\}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Addition und skalare Multiplikation werden hierbei komponentenweise erklärt:*

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+\tilde{a} & b+\tilde{b} \\ c+\tilde{c} & d+\tilde{d} \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a & \lambda \cdot b \\ \lambda \cdot c & \lambda \cdot d \end{pmatrix}$$

4. *Für eine nichtleere Menge X ist $Map(X, \mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum bzgl. der folgendermassen erklärten Addition und skalaren Multiplikation*

   $$(f+g): X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) + g(x)$$

   $$\lambda \cdot f: X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lambda \cdot f(x)$$

   für alle $f, g \in Map(X, \mathbb{R})$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Allgemeiner gilt: $Map(X, \mathbb{K})$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

5. *Hier noch ein exotischeres Beispiel: Sei $V := \mathbb{R}_{>0}$. Die Addition auf V sei definiert durch $v + w := v \cdot w$. Die skalare Multiplikation mit reellen Zahlen sei definiert durch $\mathbb{R} \times V \to V$, $\lambda \cdot v := v^\lambda$. Dann ist $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

Bemerkungen 2.4. *In einem $\mathbb{K}$-Vektorraum gilt:*

1. *$\lambda \cdot 0_V = 0_V$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.*

2. *$0 \cdot v = 0_V$ für alle $v \in V$.*

3. *$\lambda \cdot v = 0_V \Rightarrow \lambda = 0$ oder $v = 0_V$.*

4. *$(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $v \in V$.*

Beweis: Ad 1.:

$$\lambda \cdot 0_V = \lambda \cdot (0_V + 0_V) = \lambda \cdot 0_V + \lambda \cdot 0_V$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot 0_V = 0_V \quad \checkmark$$

Ad 3.: Sei $\lambda \cdot v = 0_V$. Ist $\lambda \neq 0$, so folgt nach Multiplikation mit λ^{-1} direkt $v = \lambda^{-1} \cdot 0_V = 0_V \quad \checkmark$.

Ad 2. und 4.: Übungsaufgabe. ■

Definition 2.5. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subset V$ heisst* **Untervektorraum** (sous-espace vectoriel) *von V, wenn gilt:*

1. *$W \neq \emptyset$.*

2. *$v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$.*

3. *$v \in W, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot v \in W$.*

Bemerkung 2.6. *Ist W ein Untervektorraum des $\mathbb{K}$-Vektorraums V, so ist W selber ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

Beispiele 2.7.

1. *Die Untervektorräume des reellen Vektorraums $\mathbb{R}$ sind $\{0\}$ und $\mathbb{R}$.*

2. *Die Untervektorräume des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^2$ sind alle Gerade durch den Nullpunkt (Ursprungsgeraden), sowie $\{0\}$ und $\mathbb{R}^2$.*

3. *Die Untervektorräume des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}$ sind $\{0\}$ und $\mathbb{C}$.*

4. *Sei V der komplexe Vektorraum $Map([0,1], \mathbb{C})$. Dann bildet die Menge $W := \{f \in V \mid f(0) = 0\}$ einen Untervektorraum.*

5. *Sei $V = \mathbb{R}^3$ und*

$$W := \{v = (v_1, v_2, v_3)^T \in V \mid v_1 + 2v_2 - v_3 = 0 \text{ und } 5v_1 + 3v_2 = 0\}.$$

Dann ist W ein Untervektorraum von V (siehe erste Vorlesung 25.10.2006).

6. *Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $W := \{v = (v_1, v_2)^T \mid v_1 + v_2^2 = 0\}$. Dann ist W kein Untervektorraum von V (z.B. ist $(-1,1)^T \in W$ aber $-(-1,1)^T \notin W$).*

Das nächste Lemma lassen wir als Übungsaufgabe.

Lemma 2.8. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

1. *Sind V_1, V_2 Untervektorräume von V, so ist auch $V_1 \cap V_2$ ein Untervektorraum von V.*

2. *Sei I eine Menge und sei für jedes $i \in I$ ein Untervektorraum V_i gegeben. Dann ist $\bigcap_{i \in I} V_i$ auch ein Untervektorraum von V.* ■

Mi 22.11.2006

Definition 2.9. *Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W heisst* **lineare Abbildung** (application linéaire) *oder* **Homomorphismus** *von $\mathbb{K}$-Vektorräumen, wenn für alle $v, \tilde{v} \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$f(v + \tilde{v}) = f(v) + f(\tilde{v}) \text{ und } \quad f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v).$$

f heisst **Isomorphismus**, *wenn f ein bijektiver Homomorphismus ist. In diesem Fall schreiben wir auch $f : V \xrightarrow{\cong} W$ oder einfach nur $V \cong W$.*

Ist $V = W$, so heisst ein Homomorphismus ein **Endomorphismus** (endomorphisme) *von V und ein Isomorphismus heisst ein* **Automorphismus** (automorphisme) *von V.*

Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so heisst

$$\ker(f) := f^{-1}(0) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

der **Kern** (noyau) von f. Für eine lineare Abbildung f gilt

$$f(v) = f(\tilde{v}) \iff v - \tilde{v} \in \ker(f).$$

Folglich ist f genau dann injektiv, wenn $\ker(f) = \{0\}$ gilt.

Lemma 2.10. *Sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann gilt:*

1. *Das Bild $\mathrm{im}(f) := \{f(v) \mid v \in V\}$ ist ein Untervektorraum von W.*
2. *Der Kern $\ker(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von V.*
3. *Ist f ein Isomorphismus, so ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ auch ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen.*

Beweis: Ad 1.: Da $f(0)$ im Bild liegt, ist $\mathrm{im}(f) \neq \emptyset$. ✓

Seien nun $w_1, w_2 \in \mathrm{im}(f)$. Dann gibt es $v_1, v_2 \in V$ mit $f(v_i) = w_i$, $i = 1, 2$. Also ist

$$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$$

im Bild von f. ✓

Weiter ist für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ der Vektor $\lambda \cdot w_1 \in \mathrm{im}(f)$, da $\lambda \cdot w_1 = \lambda \cdot f(v_1) = f(\lambda \cdot v_1)$. ✓

Ad 2.: Da $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, ist $f(0) = 0$. Also ist 0 im Kern von f und somit $\ker(f) \neq \emptyset$. ✓

Seien nun $v_1, v_2 \in \ker(f)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann sind $v_1 + v_2$ und $\lambda \cdot v_1 \in \ker(f)$, da $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0$ und $f(\lambda \cdot v_1) = \lambda \cdot f(v_1) = \lambda \cdot 0 = 0$ ist. ✓

Ad 3.: Ist f ein Isomorphismus, so ist f bijektiv und die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$, $f(v) \mapsto v$, wohldefiniert. Wir wollen zeigen, dass f^{-1} ein Isomorphismus ist. Es ist also zu zeigen, dass f^{-1} ein bijektiver Homomorphismus ist. Da f bijektiv ist, gilt dies auch für die Umkehrabbildung f^{-1}.

Also bleibt zu zeigen:

$$f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2) \text{ und } f^{-1}(\lambda \cdot w) = \lambda \cdot f^{-1}(w)$$

für alle $w_1, w_2, w \in W$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

(a) $f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$:

Da f bijektiv ist, reicht es zu zeigen:

$$f(f^{-1}(w_1 + w_2)) = f(f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)).$$

Sei $v_i := f^{-1}(w_i)$, $i = 1, 2$. Dann ist

$$f(f^{-1}(w_1+w_2)) = w_1+w_2 = f(v_1)+f(v_2) = f(v_1+v_2) = f(f^{-1}(w_1)+f^{-1}(w_2)). \quad \checkmark$$

(b) $f^{-1}(\lambda \cdot w) = \lambda \cdot f^{-1}(w)$:

Da f bijektiv ist, reicht es zu zeigen:

$$f(f^{-1}(\lambda \cdot w)) = f(\lambda \cdot f^{-1}(w)).$$

Sei $v := f^{-1}(w)$. Dann ist

$$f(f^{-1}(\lambda \cdot w)) = \lambda \cdot w = \lambda \cdot f(v) = f(\lambda \cdot v) = f(\lambda \cdot f^{-1}(w)). \quad \checkmark$$

$\blacksquare$

Beispiele 2.11. *1. Sei* $V := M(2 \times 2, \mathbb{R}) := \{A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ *und* $f : V \to \mathbb{R}$, $A \mapsto a + d$. *Dann ist* f *eine lineare Abbildung, da für* $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{smallmatrix}\right)$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$f(A+\tilde{A}) = f\begin{pmatrix} a+\tilde{a} & b+\tilde{b} \\ c+\tilde{c} & d+\tilde{d} \end{pmatrix} = (a+\tilde{a})+(d+\tilde{d}) = (a+d)+(\tilde{a}+\tilde{d}) = f(A)+f(\tilde{A})$$

und

$$f(\lambda \cdot A) = f\left(\begin{smallmatrix} \lambda\cdot a & \lambda\cdot b \\ \lambda\cdot c & \lambda\cdot d \end{smallmatrix}\right) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot d = \lambda \cdot (a + d) = \lambda \cdot f(A).$$

Insbesondere ist der Kern $\ker(f) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a = -d\}$ *ein Untervektorraum von* V *(das Bild von* f *ist in diesem Beispiel ganz* $\mathbb{R}$ *).*

2. Sei $V := Map([0, 2], \mathbb{C}) = \{g : [0, 2] \to \mathbb{C}\}$ *und* $\alpha : V \to \mathbb{C}$, $\alpha(g) := g(1)$. *Dann ist* α *ein Homomorphismus von* $\mathbb{C}$*-Vektorräumen. Für* $g_1, g_2 \in V$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}$ *gilt:*

$$\alpha(g_1 + g_2) = (g_1 + g_2)(1) = g_1(1) + g_2(1) = \alpha(g_1) + \alpha(g_2), \quad \checkmark$$

$$\alpha(\lambda \cdot g_1) = (\lambda \cdot g_1)(1) = \lambda \cdot (g_1(1)) = \lambda \cdot \alpha(g_1). \quad \checkmark$$

Insbesondere ist $\ker(\alpha) = \{g : [0, 2] \to \mathbb{C} \mid g(1) = 0\}$ *ein Untervektorraum von* V *(das Bild ist in diesem Beispiel ganz* $\mathbb{C}$ *).*

3. *Sei* $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *der* $\mathbb{R}$*-Vektorraum der stetigen reell-wertigen Funktionen auf* $\mathbb{R}$ *und sei* $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *der* $\mathbb{R}$*-Vektorraum der stetig differenzierbaren reell-wertigen Funktionen auf* $\mathbb{R}$*. Der Ableitungsoperator*

$$D : C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad f \mapsto f',$$

ist eine lineare Abbildung mit Kern

$$ker(D) = \{konstante\ Funktionen\} \cong \mathbb{R}$$

(das Bild ist in diesem Beispiel nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung ganz $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *).*

Definition 2.12. *Sei* V *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum und seien* $v_1, \dots, v_r$ *Vektoren in* V*.*

1. $v \in V$ *heisst* **Linearkombination** (combinaison linéaire) *von* $v_1, \dots, v_r$*, wenn es* $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ *gibt mit*

$$v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot v_i = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_r \cdot v_r.$$

Die Linearkombination $0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_r$ *heisst* **triviale** *Linearkombination.*

2. $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_r) := \{v \in V \mid v \text{ ist Linearkombination von } v_1, \dots, v_r\}$ *heisst der* **von den $v_1, \dots, v_r$ erzeugte Untervektorraum** (sous-espace engendré par $v_1, \dots, v_r$) *oder der von den* $v_1, \dots, v_r$ *aufgespannte Vektorraum. Für* $I = \emptyset$ *sei* $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(\emptyset) := \{0\}$*. Manchmal schreiben wir statt* $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}$ *nur* span.

3. *Sei* I *eine (beliebige) Menge und* $(v_i)_{i \in I}$ *eine Familie von Vektoren von* V *(d.h.* $(v_i)_{i\in I} : I \to V$*,* $i \mapsto v(i) =: v_i$*).* $v \in V$ *heisst* **Linearkombination** *der Familie* $(v_i)_{i\in I}$*, wenn es eine endliche Teilmenge* $\{i_1, \dots, i_r\} \subset I$ *und* $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ *gibt mit*

$$v = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \cdot v_{i_j} = \lambda_1 \cdot v_{i_1} + \ldots + \lambda_r \cdot v_{i_r}.$$

4. $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_i)_{i\in I} := \{v \in V \mid v \text{ ist Linearkombination der } (v_i)_{i\in I}\}$ *heisst der* **von $(v_i)_{i\in I}$ erzeugte Untervektorraum***.*

Bemerkungen 2.13. 1. $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_i)_{i\in I}$ *ist ein Untervektorraum von* V*.*

2. $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_i)_{i\in I}$ *ist der kleinste Untervektorraum von* V*, der alle* v_i*,* $i \in I$*, enthält, d.h.*

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_i)_{i\in I} = \bigcap W,$$

wobei der Schnitt über

$$\{W \subset V \mid W \text{ ist Untervektorraum von } V \text{ und } v_i \in W\ \forall\, i \in I\}$$

gebildet wird.

Beispiele 2.14. 1. *Sei* $V := \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,0,0)^T$, $v_2 = (0,1,0)^T$, $v_3 = (1,1,0)^T$, $v_4 = (0,-1,1)^T$.

Dann ist $\mathrm{span}(v_1, v_2) = \mathrm{span}(v_1, v_3) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$ *und* $\mathrm{span}(v_1, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$. *Wie sehen* $\mathrm{span}(v_2, v_3)$ *und* $\mathrm{span}(v_2, v_3, v_4)$ *aus?*

2. $\mathbb{K}^n = \mathrm{span}(e_1, \dots, e_n)$, *wobei* $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ *in der iten Stelle eine* 1 *als Eintrag und sonst nur Nullen als Einträge hat (* e_i *heisst iter* **kanonischer Basisvektor** *des* $\mathbb{K}^n$ *).*

3. *Sei* $V := Map([0,1], \mathbb{R})$ *und* $I = [0,1]$. *Für* $i \in I$ *sei*

$$v_i : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0, & t \neq i \\ 1, & t = i \end{cases}$$

Dann ist

$$\mathrm{span}(v_i)_{i \in I} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist nur an endlich vielen Stellen } \neq 0\}.$$

Definition 2.15. *Ein* $\mathbb{K}$-*Vektorraum* V *heisst* **endlich dimensional** (dimension finie), $\dim V < \infty$, *wenn* V *von endlich vielen Vektoren aus* V *erzeugt wird, d.h. es gibt* $v_1, \dots, v_r \in V$ *mit* $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_r) = V$.

Ist V *nicht endlich dimensional, so heisst* V **unendlich dimensional** (dimension infinie), $\dim V = \infty$.

Bemerkung 2.16. $\mathbb{K}^n$ *ist endlich dimensional,* $Map([0,1], \mathbb{R})$ *ist unendlich dimensional.*

Do 23.11.2006

Definition 2.17. *Sei* V *ein* $\mathbb{K}$-*Vektorraum. Vektoren* $v_1, \dots, v_r \in V$ *heissen* **linear unabhängig** (linéarement indépendant) *oder* **frei** (libre), *falls gilt:*

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_r \cdot v_r = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0.$$

Sind $v_1, \dots, v_r$ *nicht linear unabhängig, so sind sie* **linear abhängig** (linéarement dépendant / liée).

Beispiele 2.18. 1. *Sei* $V := \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,-1,0)^T$, $v_2 = (1,0,-1)^T$, $v_3 = (0,1,-1)$. *Dann ist* (v_1, v_2) *linear unabhängig, da*

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0, -\lambda_1 = 0, -\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Genauso zeigt man, dass die Vektoren v_1, v_3 *(bzw.* v_2, v_3*) linear unabhängig sind. Die Familie* (v_1, v_2, v_3) *ist aber linear abhängig, da* $v_1 - v_2 + v_3 = 0$ *ist.*

2. *Sei* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ *und* $V := \mathbb{R}$ *aufgefasst als* $\mathbb{Q}$-*Vektorraum. Dann sind* 1 *und* $\sqrt{5}$ *linear unabhängige Vektoren aus* V.

Definition 2.19. *Sei* V *ein* $\mathbb{K}$-*Vektorraum und* $(v_i)_{i \in I}$ *eine Familie von Vektoren aus* V. *Die Familie* $(v_i)_{i \in I}$ *heisst* **linear unabhängig**, *falls jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist, d.h. für jede endliche Teilmenge* $J \subset I$ *ist die Familie* $(v_i)_{i \in J}$ *linear unabhängig.*

Bemerkung 2.20. *Die Familie $(v_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig, falls für jede Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ von Skalaren mit $\lambda_i = 0$ für fast alle $i \in I$ (d.h. $\lambda_i = 0$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$) gilt:*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall\, i \in I$$

Lemma 2.21. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *$(v_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig.*
2. *Jeder Vektor $v \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_i)_{i\in I}$ lässt sich eindeutig als Linearkombination der $(v_i)_{i\in I}$ schreiben.*

Beweis: (1. $\Rightarrow$ 2.): Angenommen $v = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i\in I} \widetilde{\lambda}_i \cdot v_i$ und fast alle $\lambda_i, \widetilde{\lambda}_i$ sind Null. Wir wollen zeigen, dass $\lambda_i = \widetilde{\lambda}_i$ für alle $i \in I$ gilt. Nach Voraussetzung gibt es endliche Teilmengen $J \subset I$ und $\widetilde{J} \subset I$ mit $\lambda_i = 0$ für $i \notin J$ und $\widetilde{\lambda}_i = 0$ für $i \notin \widetilde{J}$. Also ist

$$v = \sum_{i\in J} \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i\in \widetilde{J}} \widetilde{\lambda}_i \cdot v_i.$$

Dann folgt

$$0 = v - v = \sum_{i\in J} \lambda_i \cdot v_i - \sum_{i\in \widetilde{J}} \widetilde{\lambda}_i \cdot v_i = \sum_{i\in J\cup\widetilde{J}} (\lambda_i - \widetilde{\lambda}_i) \cdot v_i$$

und somit $\lambda_i = \widetilde{\lambda}_i$ für alle $i \in I$, da $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist (für $i \notin J \cup \widetilde{J}$ gilt $\lambda_i = \widetilde{\lambda}_i$ trivialerweise, da beide Seiten verschwinden). ✓

(2. $\Rightarrow$ 1.): Sei $\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i = 0$, wobei fast alle λ_i gleich Null sind. Definiere $\mu_i = 0$ für alle $i \in I$. Dann gilt

$$0 = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i\in I} \mu_i \cdot v_i.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Linearkombination folgt $\lambda_i = \mu_i = 0$ für alle $i \in I$. Die Familie $(v_i)_{i\in I}$ ist also linear unabhängig. ✓ ■

Bemerkung 2.22. *$v_1, \ldots, v_r$ sind genau dann linear abhängig, wenn es ein $j \in \{1, \ldots, r\}$ gibt, so dass sich v_j als Linearkombination von $(v_i)_{i\neq j}$ schreiben lässt.*

Beweis: ($\Rightarrow$): Ist $(v_1, \ldots, v_r)$ linear abhängig, so gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ - nicht alle gleich Null - mit $\sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot v_i = 0$. Wähle ein $j \in \{1, \ldots, r\}$ mit $\lambda_j \neq 0$. Dann ist

$$v_j = \sum_{\substack{i=1,\ldots,r \\ i\neq j}} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right) \cdot v_i.$$

Der Vektor v_j ist also eine Linearkombination von $(v_i)_{i\neq j}$. ✓

(⇐): Sei

$$v_j = \sum_{\substack{i=1,\dots,r \\ i\neq j}} \lambda_i \cdot v_i$$

für geeignet gewählte Skalare $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Definiere $\lambda_j := -1$. Dann folgt

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot v_i = 0 \text{ mit } \lambda_j \neq 0.$$

Die Familie $(v_i)_{i=1,\dots,r}$ ist also linear abhängig. ✓ ■

Sind $v_1, \dots, v_r$ linear abhängig, so folgt nicht, dass sich jeder der Vektoren als Linearkombination der anderen schreiben lässt. Finden Sie ein Beispiel, wo sich genau einer der Vektoren als Linearkombination der anderen schreiben lässt! Üben Sie das Konzept lineare (Un-)Abhängigkeit, beantworten Sie die folgenden Fragen: Für welche $v \in V$ ist (v) linear unabhängig? Ist eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ linear abhängig, wenn es $i \neq j$ mit $v_i = v_j$ gibt? Ist eine Familie, die den Nullvektor enthält, immer linear abhängig?

Beispiel 2.23. *Sei $V := \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_0, x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall\ i \in \mathbb{N}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reell-wertigen Folgen, Addition und skalare Multiplikation sind komponentenweise erklärt:*

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) + (y_0, y_1, y_2, \dots) := (x_0 + y_0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$$

$$\lambda \cdot (x_0, x_1, x_2, \dots) := (\lambda \cdot x_0, \lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots)$$

Sei $v_i := (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ der Vektor, der an den ersten $(i+1)$ Stellen eine 1 und sonst nur Nullen hat. Dann ist $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig.

Beweis: *Sei $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \cdot v_i = 0$ und $\lambda_i = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$. Angenommen nicht alle λ_i sind gleich Null. Sei $m \in \mathbb{N}$ die grösste natürliche Zahl für die $\lambda_m \neq 0$ ist. Dann folgt $\sum_{i\leq m} \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \cdot v_i = 0$ und Inspektion der $(m+1)$-ten Stelle im Vektor $\sum_{i\leq m} \lambda_i \cdot v_i$ zeigt $\lambda_m = 0$.* ↯
Also ist $\lambda_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. ✓ ■

Definition 2.24. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus V. $(v_i)_{i\in I}$ heisst* **Basis** (base) *von V, wenn $(v_i)_{i\in I}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V ist, d.h. wenn gilt:*

1. *$V = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}(v_i)_{i\in I}$ und*
2. *$(v_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig.*

Beispiele 2.25.
1. *$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ ist eine Basis von $\mathbb{K}^n$, die* **kanonische Basis** (base canonique) *des $\mathbb{K}^n$.*
2. *$(1, i)$ ist eine Basis des reellen Vektorraums $\mathbb{C}$.*
3. *$(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T$ bilden eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ (siehe 1.). Die Vektoren $v_1 := (1,1,0)^T, v_2 := (0,2,-3)^T, v_3 := (\frac{1}{3}, 2, 1)^T$ bilden eine weitere Basis von $\mathbb{Q}^3$ (Beweis: Übungsaufgabe).*

Mi 29.11.2006

Proposition 2.26. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $V \neq \{0\}$. Für eine endliche Familie von Vektoren $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_r)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *$\mathcal{B}$ ist eine Basis.*
2. *$\mathcal{B}$ ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_r) = V$ aber für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ ist $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_i)_{i \neq j} \neq V$.*
3. *$\mathcal{B}$ ist maximal linear unabhängig, d.h. $(v_1 \dots, v_r)$ ist linear unabhängig, aber für jedes $v \in V$ ist $(v, v_1, \dots, v_r)$ linear abhängig.*

Beweis: : (1. $\Rightarrow$ 2.): $\mathcal{B}$ Basis $\Rightarrow \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_i)_{i=1,\dots,r} = V$. Noch zu zeigen: Für jedes j gilt $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_i)_{i \neq j} \neq V$. Angenommen $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_i)_{i \neq j} = V$. Dann ist v_j Linearkombination der $(v_i)_{i \neq j}$, also ist $(v_i)_{i=1,\dots,r}$ linear abhängig $\lightning$ (Widerspruch zu $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r)$ Basis). Also gilt $\operatorname{span}(v_i)_{i \neq j} \neq V$ für jedes j. ✓

(2. $\Rightarrow$ 3.): Zunächst zeigen wir $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig. Sei $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot v_i = 0$ Wir wollen zeigen, dass alle λ_i verschwinden. Angenommen $\lambda_j \neq 0$. Dann ist $v_j \in \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_r)$ und somit $V = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_r) = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_i)_{i \neq j}$ $\lightning$ (dies steht im Widerspruch zur Minimalität des Erzeugendensystems $(v_1, \dots, v_r)$). Also ist $(v_1, \dots, v_r)$ linear unabhängig. ✓

Bleibt zu überprüfen, dass $(v_1, \dots, v_r)$ eine maximale linear unabhängige Familie ist. Sei $v \in V$ beliebig. Zu zeigen: $(v, v_1, \dots, v_r)$ ist linear abhängig. Dies folgt aber direkt, da nach Voraussetzung $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_r) = V$ und somit v Linearkombination der v_i ist. ✓

(3. $\Rightarrow$ 1.): Nach Voraussetzung ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig. Bleibt zu zeigen: $\mathcal{B}$ erzeugt V. Betrachte dazu $v \in V$. Da nach Voraussetzung $(v, v_1, \dots, v_r)$ linear abhängig ist, gibt es $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, nicht alle Null, mit $\lambda \cdot v + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot v_i = 0$. Da $(v_1, \dots, v_r)$ linear unabhängig ist, muss $\lambda \neq 0$ sein. Also lässt sich v als Linearkombination der $v_1, \dots, v_r$ schreiben. Da dies für alle $v \in V$ gilt, ist $\operatorname{span}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_r) = V$. ✓ ∎

Bemerkung 2.27. *Ist V ein unendlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, so besitzt V unendlich viele linear unabhängige Vektoren.*

Beweis: Wir konstruieren induktiv eine unendliche linear unabhängige Familie.

Da $\dim V = \infty$, ist $V \neq \{0\}$. Wähle $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0$. Dann ist (v_1) linear unabhängig. Soviel zum Induktionsanfang.

Nun zum Induktionsschritt: Sei $(v_1, \dots, v_r)$ eine linear unabhängige Familie. Angenommen $(v, v_1, \dots, v_r)$ ist linear abhängig für alle $v \in V$. Dann folgt mit Proposition 2.26, dass $(v_1, \dots, v_r)$ den Vektorraum V erzeugt. Dies steht im Widerspruch zu $\dim V = \infty$. Folglich gibt es ein $v_{r+1} \in V$, so dass die Familie $(v_1, \dots, v_r, v_{r+1})$ linear unabhängig ist. ∎

Theorem 2.28 (Basisauswahlsatz). *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(v_1, \dots, v_n)$ ein Erzeugendensystem von V. Dann können wir aus $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis auswählen. Genauer gilt:*

Es gibt eine Teilmenge $\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, so dass $(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ eine Basis von V ist.

Beweis: Ist $(v_1, \dots, v_n)$ keine Basis, so kann nach Proposition 2.26 ein j gewählt werden, für welches $(v_i)_{i \neq j}$ ein Erzeugendensystem von V ist. Ersetze nun das ursprüngliche Erzeugendensystem $(v_i)_i$ durch $(v_i)_{i \neq j}$ und wiederhole obige Überlegung. Nach endlich vielen Schritten erhält man eine Basis $(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ von V. ∎

Korollar 2.29. *Jeder endlich dimensionale Vektorraum besitzt eine Basis.* ∎

Es kann gezeigt werden, dass JEDER Vektorraum (also auch jeder unendlich dimensionale Vektorraum) eine Basis besitzt. Der Beweis benutzt Methoden der Mengenlehre, wie z.B. das Zornsche Lemma.

Theorem 2.30 (Austauschsatz von Steinitz)**.** *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und sei $(w_1, \dots, w_r)$ linear unabhängig. Dann gilt:*

1. *$r \leq n$ und*
2. *es gibt Vektoren $v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$, $i_1 < i_2 \dots < i_r$, in $\mathcal{B}$, so dass man nach Austausch von v_{i_1} durch w_1, v_{i_2} durch w_2, …, v_{i_r} durch w_r, wieder eine Basis von V erhält.*

Beweis: später!

Beispiel 2.31. *Sei $V := \mathbb{R}^3$, $v_i := e_i$ für $i = 1, 2, 3$, und $w := (0, 4, -3)^T$. Dann ist (v_1, v_2, v_3) eine Basis und w linear unabhängig. Nach dem Austauschsatz kann einer der Vektoren v_i durch w ersetzt werden. Tatsächlich ist (v_1, v_2, w) wieder eine Basis von V (ersetzt man v_1 durch w, so erhält man keine Basis !).*

Korollar 2.32. *Sind $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_r)$ Basen von V, so ist $r = n$.*

Beweis: Nach dem Austauschsatz ist $r \leq n$ und $n \leq r$. ∎

Definition 2.33. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die* **Dimension** (dimension) *von V, $\dim V$, ist definiert durch*

$$\dim V := \begin{cases} n, & \text{falls } V \text{ eine Basis } (v_1, \dots, v_n) \text{ besitzt} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Korollar 2.34. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n und $v_1, \dots, v_{n+1}$ Vektoren aus V. Dann ist $(v_1, \dots, v_{n+1})$ linear abhängig.*

Beweis: Folgt direkt aus dem Austauschsatz. ∎

Als Vorbereitung für den Beweis der Austauschsatzes zeigen wir zunächst das folgende Lemma.

Lemma 2.35. *Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$. Ist $\lambda_k \neq 0$, so ist $(v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von V (d.h. v_k und w können ausgetauscht werden).*

Beweis: Nach Umnumerieren der Basiselemente können wir $k = 1$ annehmen. Also ist O.B.d.A. (=ohne Beschränkung der Allgemeinheit=sans restriction) $\lambda_1 \neq 0$. Wir wollen zeigen: $(w, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ ist eine Basis von V.

Beh.: $\operatorname{span}(w, v_2, \ldots, v_n) = V$
Bew.: Es ist $w = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n$ und $\lambda_1 \neq 0$ nach Voraussetzung. Also ist $v_1 \in \operatorname{span}(w, v_2, \ldots, v_n)$ und somit $\operatorname{span}(w, v_2, \ldots, v_n) = \operatorname{span}(w, v_1, v_2, \ldots, v_n) = V$. ✓

Beh.: $(w, v_2, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig.
Bew.: Sei $\mu \cdot w + \mu_2 \cdot v_2 + \ldots + \mu_n \cdot v_n = 0$. Zu zeigen: $\mu = 0$ und $\mu_2 = \ldots = \mu_n = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \mu \cdot w + \mu_2 \cdot v_2 + \ldots + \mu_n \cdot v_n \\ &= \mu(\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n) + \mu_2 \cdot v_2 + \ldots + \mu_n \cdot v_n \\ &= \mu \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + (\mu \cdot \lambda_2 + \mu_2) \cdot v_2 + \ldots + (\mu \cdot \lambda_n + \mu_n) \cdot v_n \\ &\Rightarrow \mu \cdot \lambda_1 = 0, \text{ da } (v_1, \ldots, v_n) \text{ linear unabhängig} \\ &\Rightarrow \mu = 0, \text{ da } \lambda_1 \neq 0 \end{aligned}$$

Also ist $\mu_2 \cdot v_2 + \ldots + \mu_n \cdot v_n = 0$. Da $(v_2, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist, folgt auch $\mu_2 = \ldots = \mu_n = 0$. ■

Do 30.11.2006

Beweis des Austauschsatzes 2.30: Für $r = 0$ ist nichts zu beweisen (Induktionsanfang). Sei also $r \geq 1$. Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass der Satz für $r - 1$ schon bewiesen ist. Da $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist und $(w_1, \ldots, w_{r-1})$ linear unabhängig sind, erhalten wir nach Induktionsvoraussetzung eine Basis durch geeignetes Austauschen von $(r-1)$ Vektoren der Basis $\mathcal{B}$ mit $w_1, \ldots, w_{r-1}$. Nach Umnumerieren der v_i können wir also annehmen, dass $(w_1, w_2, \ldots, w_{r-1}, v_r, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist auch $r - 1 \leq n$.

Beh.: $r \leq n$.
Bew.: Angenommen dies ist nicht der Fall. Dann ist $r - 1 = n$ und somit $(w_1, \ldots, w_{r-1})$ eine Basis. Nach Proposition 2.26 ist dann aber $(w_1, \ldots, w_{r-1}, w_r)$ linear abhängig. $\lightning$ Also ist $r \leq n$. ✓

Wir müssen noch zeigen, dass wir aus $\mathcal{B}' := (w_1, w_2, \ldots, w_{r-1}, v_r, \ldots, v_n)$ durch Austausch von w_r mit einem geeigneten v_k, $k \geq r$, wieder eine Basis erhalten. Dazu schreiben wir w_r als Linearkombination in der Basis $\mathcal{B}'$,

$$w_r = \lambda_1 \cdot w_1 + \ldots + \lambda_{r-1} \cdot w_{r-1} + \lambda_r \cdot v_r + \ldots + \lambda_n \cdot v_n.$$

Beh.: $\lambda_r, \ldots, \lambda_n$ sind nicht alle gleich Null.
Bew.: Angenommen $\lambda_r = \ldots = \lambda_n = 0$. Dann folgt

$$w_r = \lambda_1 \cdot w_1 + \ldots + \lambda_{r-1} \cdot w_{r-1}$$

was im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $(w_1, \ldots, w_r)$ steht. $\lightning$ ✓

Also gibt es ein $k \geq r$ mit $\lambda_k \neq 0$. Nach Lemma 2.35 ist dann

$$(w_1, \ldots, w_{r-1}, v_r, \ldots, v_{k-1}, w_r, v_{k+1}, \ldots, v_n)$$

eine Basis von V. Wie gewünscht erhalten wir also aus $\mathcal{B}'$ durch Austausch von w_r mit einem geeigneten v_k wieder eine Basis. ■

Korollar 2.36. *Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $W \subset V$ ein Untervektorraum. Dann gilt:*

1. $\dim W \leq \dim V$ *und*
2. $(\dim W = \dim V) \iff (W = V)$

Beweis: Übungsaufgabe. ■

Theorem 2.37 (Basisergänzungssatz)**.** *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und seien $w_1, \ldots, w_r$ linear unabhängige Vektoren aus V. Dann kann $(w_1, \ldots, w_r)$ zu einer Basis ergänzt werden, d.h. es gibt Vektoren $w_{r+1}, \ldots, w_n$, so dass $(w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_n)$ eine Basis von V ist.*

Beweis: Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Nach dem Austauschsatz erhalten wir wieder eine Basis von V, wenn wir r geeignet gewählte Vektoren aus $(v_1, \ldots, v_n)$ durch $w_1, \ldots, w_r$ ersetzen. Nach Umnumerierung können wir O.B.d.A. annehmen, dass $v_1, \ldots, v_r$ ausgetauscht werden, also $(w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist. Der Satz folgt (schreibe w_i statt v_i für $i > r$). ■

Definition 2.38. *Seien $W_1, W_2, \ldots, W_r$ Untervektorräume des Vektorraums V. Dann heisst*

$$W_1 + \ldots + W_r := \operatorname{span}(W_1 \cup \ldots \cup W_r)$$

die **Summe** (somme) *von $W_1, W_2, \ldots, W_r$.*

An dieser Stelle wollen wir bemerken, dass span für Familien von Vektoren eingeführt wurde, es aber nur auf die zugrundeliegende Menge der Vektoren ankommt, d.h. es macht Sinn span für Mengen zu definieren: Ist W eine Menge, $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie mit $W = \{v_i \mid i \in I\}$ und $(\widetilde{v}_j)_{j \in J}$ eine weitere Familie mit $W = \{\widetilde{v}_j \mid j \in J\}$, dann ist $\operatorname{span}(v_i)_{i \in I} = \operatorname{span}(\widetilde{v}_j)_{j \in J}$.

Bemerkung 2.39 (Übungsaufgabe)**.**

$$W_1 + \ldots + W_r = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot w_i \mid w_i \in W_i \text{ und } \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Beispiele 2.40 (Aufgabe)**.** *Beschreiben Sie die Summe von Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$.*

Theorem 2.41 (Dimensionsformel)**.** *Seien W_1 und W_2 endlich dimensionale Untervektorräume des Vektorraums V. Dann ist $W_1 + W_2$ endlich dimensional und es gilt:*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Beweis: $W_1 \cap W_2$ ist endlich dimensional, da W_1 endlich dimensional ist. Sei $(v_1, \ldots, v_m)$ eine Basis von $W_1 \cap W_2$. Dann ist $(v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhängig in W_1.

Nach dem Basisergänzungssatz können wir $(v_1, \ldots, v_m)$ zu einer Basis von W_1 ergänzen, d.h. es gibt $w_1, \ldots, w_k \in W_1$, so dass $(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_k)$ eine Basis von W_1 ist. Nach dem Basisergänzungssatz gibt es auch $\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_l \in W_2$, so dass $(v_1, \ldots, v_m, \widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_l)$ eine Basis von W_2 ist. Da $W_1 + W_2$ von den Vektoren $v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots w_k, \widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_l$ erzeugt wird, ist $W_1 + W_2$ endlich dimensional.

Beh.: $(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots w_k, \widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_l)$ ist eine Basis von $W_1 + W_2$.
Bew.: Wie müssen nur noch zeigen, dass die Vektoren linear unabhängig sind. Sei also

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \cdot w_j + \sum_{s=1}^{l} \widetilde{\mu}_s \cdot \widetilde{w}_s = 0$$

Dann ist $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \cdot w_j \in W_1 \cap W_2$ und somit $\mu_j = 0$ für $j = 1, \ldots, k$. Also ist

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i + \sum_{s=1}^{l} \widetilde{\mu}_s \cdot \widetilde{w}_s = 0$$

Da $(v_1, \ldots, v_m, \widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_l)$ eine Basis von W_2 ist, verschwinden auch die Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \widetilde{\mu}_1, \ldots, \widetilde{\mu}_l$. Also sind $v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots w_k, \widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_l$ linear unabhängig. ✓

Wir haben also

$$\dim(W_1 \cap W_2) = m, \dim(W_1) = m + k,$$

$$\dim(W_2) = m + l, \dim(W_1 + W_2) = m + k + l$$

und somit

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

■

Beispiel 2.42. *Die Dimension des Schnittes von zwei 2-dimensionalen Untervektorräumen (=Ebenen) im $\mathbb{R}^3$ ist nach der Dimensionsformel mindestens 1.*

In einem n-dimensionalen Vektorraum V heissen die 1-dimensionalen Untervektorräume **Geraden** (droite vectorielle), die 2-dimensionalen Untervektorräume **Ebenen** (plan vectorielle) und die $(n-1)$-dimensionalen Untervektorräume **Hyperebenen** (hyperplan).

Definition 2.43. *Ein Vektorraum V heisst* **direkte Summe** (somme directe) *von zwei Untervektorräumen W_1 und W_2, $V = W_1 \oplus W_2$, wenn $V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ gilt.*

Lemma 2.44. *Sei V die Summe der Untervektorräume W_1 und W_2. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *$V = W_1 \oplus W_2$*
2. *jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig als $v = w_1 + w_2$ mit $w_i \in W_i$ darstellen.*

.12.2006

Beweis: (1. $\Rightarrow$ 2.): Sei $v = w_1 + w_2 = \widetilde{w}_1 + \widetilde{w}_2$ mit $w_i, \widetilde{w}_i \in W_i$. Dann ist

$$(w_1 + w_2) - (\widetilde{w}_1 + \widetilde{w}_2) = v - v = 0,$$

also $(w_1 - \widetilde{w}_1) = (\widetilde{w}_2 - w_2) \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$ und somit $w_1 = \widetilde{w}_1$ und $w_2 = \widetilde{w}_2$. Die Zerlegung von v ist also eindeutig. ✓

(2. $\Rightarrow$ 1.): Sei $v \in W_1 \cap W_2$ und sei $w_1 := v \in W_1$, $w_2 := v \in W_2$. Dann folgt wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung aus $v = w_1 + 0 = 0 + w_2$ direkt $w_1 = w_2 = 0$ und somit $v = 0$. ✓ ∎

Sei $V = W_1 \oplus W_2$ und seien $p_1 : W \to W_1$ und $p_2 : W \to W_2$ die Abbildungen zu der eindeutigen Zerlegung, d.h. $v = p_1(v) + p_2(v)$.

Definition 2.45. *Die Abbildung $p_i : V \to W_i$ heisst* **Projektion** (projection) *auf den iten Summanden der direkten Summe.*

Bemerkung 2.46 (Übungsaufgabe)**.** *$p_1 : V \to W_1$ ist ein Epimorphismus (=surj. Homom.) mit Kern $\ker(p_1) = W_2$, $p_2 : V \to W_2$ ist ein Epimorphismus mit Kern $\ker(p_2) = W_1$.*

Bemerkung 2.47 (Übungsaufgabe)**.** *$V = W_1 \oplus W_2 \iff V = W_1 + W_2$ und für jede Wahl von $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$, $w_1 \neq 0$, $w_2 \neq 0$, ist (w_1, w_2) linear unabhängig.*

Definition 2.48. *Zwei Untervektorräume W_1 und W_2 heissen zueinander* **komplementär** (complémentaire)*, falls $V = W_1 \oplus W_2$.*

Beispiele 2.49.

1. *Sei $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 := \operatorname{span}(e_1, e_3)$ und $W_2 := \operatorname{span}(v)$ für $v = (x_1, x_2, x_3)^T \in V$. Dann sind W_1 und W_2 genau dann komplementär, wenn $x_2 \neq 0$ ist.*

2. *Sei $V := M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Dann sind die Untervektorräume*

$$W_1 := \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{R}\} \text{ und } W_2 := \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

komplementär. Ebenso ist W_1 zu $\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ komplementär etc.

Lemma 2.50. *Ist W ein Untervektorraum eines endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums V, so gibt es einen zu W komplementären Untervektorraum W' von V.*

Beweis: Wähle eine Basis $(v_1, \ldots, v_r)$ von W und ergänze sie zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ von V. Definiere $W' := \operatorname{span}(v_{r+1}, \ldots, v_n)$. Dann folgt

$$V = W + W' \text{ und } W \cap W' = \{0\}$$

∎

Definition 2.51. *Seien $W_1, \ldots, W_k$ Untervektorräume des Vektorraums V. Dann heisst V die* **direkte Summe** *von $W_1, \ldots, W_k$, $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$, wenn $V = W_1 + \ldots + W_k$ und für jede Wahl $w_i \in W_i$, $w_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$, gilt: $(w_1, \ldots, w_k)$ ist linear unabhängig.*

Bemerkung 2.52 (Übungsaufgabe). *Für einen endlich dimensionalen Vektorraum V gilt:*

$$V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k \iff (V = W_1 + \ldots + W_k \text{ und } \dim V = \dim W_1 + \ldots + \dim W_k)$$

Sei nun $f : V \to W$ ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann ist das Bild $\mathrm{im}(f) := f(V)$ ein Untervektorraum von W und der Kern $\ker(f) := f^{-1}(0)$ ein Untervektorraum von V (siehe Lemma 2.10). Ist V endlich dimensional, so sind auch $\mathrm{im}(f)$ und $\ker(f)$ endlich dimensional (siehe Korollar 2.36).

Proposition 2.53. *Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}$-Vektorräumen und $\dim V < \infty$. Sei $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von $\ker(f)$, $(w_1, \ldots, w_r)$ eine Basis von $\mathrm{im}(f)$ und seien $u_1, \ldots, u_r \in V$ mit $f(u_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, r$. Dann ist $(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_r)$ eine Basis von V.*

Beweis: $\underline{V = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_r)}$: *Sei $v \in V$. Dann ist*

$$f(v) = \mu_1 \cdot w_1 + \ldots + \mu_r \cdot w_r$$

für geeignet gewählte $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{K}$. Sei

$$v' := \sum_{i=1}^{r} \mu_i \cdot u_i$$

Dann folgt

$$f(v') = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \cdot w_i = f(v) \Rightarrow f(v - v') = 0 \Rightarrow (v - v') \in \ker(f).$$

Es gibt also $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ mit $v - v' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot v_i$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^{r} \mu_i \cdot w_i \in \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_r). \quad \checkmark$$

$\underline{(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_r) \text{ linear unabhängig}}$: *Sei*

$$\mu_1 \cdot u_1 + \ldots + \mu_r \cdot u_r + \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_k \cdot v_k = 0 \tag{$*$}$$

Wir wollen zeigen, dass in der Linearkombination alle Koeffizienten verschwinden. Aus $(*)$ folgt

$$0 = f\left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i \cdot u_i + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot v_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \cdot w_i$$

Da $(w_1, \ldots, w_r)$ linear unabhängig ist, ist $\mu_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, r$. Die Gleichung $(*)$ liefert somit $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_k \cdot v_k = 0$ und wegen der linearen Unabhängigkeit der v_i folgt dann auch $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. $\checkmark$ ■

Korollar 2.54. *Sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus und $\dim V < \infty$. Dann gilt:*

$$\dim V = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{im}(f)$$

Beweis: Sei $(v_1, \dots, v_k)$ eine Basis von $\ker(f)$ und $(w_1, \dots, w_r)$ eine Basis von $\operatorname{im}(f)$. Nach der obigen Proposition gibt es dann eine Basis von V mit $k + r$ Elementen. Also gilt $\dim V = k + r = \dim\ker(f) + \dim\operatorname{im}(f)$. ■

Korollar 2.55. *Für endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume gilt:*

$$\dim V = \dim W \iff V \cong W$$

Beweis: ($\Leftarrow$) Sei $V \cong W$, d.h. es gibt einen Isomorphismus $f : V \to W$. Dann folgt

$$\dim V = \dim\ker(f) + \dim\operatorname{im}(f) = \dim\{0\} + \dim W = \dim W \quad \checkmark$$

($\Rightarrow$) Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $(w_1, \dots, w_n)$ eine Basis von W. Dann definiert $f : v_i \mapsto w_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, eindeutig einen Homomorphismus (siehe Übungsaufgabe weiter unten)

$$f : V \to W, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot w_i$$

Da $(w_1, \dots, w_n)$ eine Basis von W ist, ist f injektiv und surjektiv. Also ist $f : V \to W$ ein Isomorphismus. ✓ ■

Bemerkung 2.56 (Übungsaufgabe)**.** *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (nicht notwendig endlich dimensional) und sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V. Sei W ein weiterer $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $w_i \in W$ für alle $i \in I$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$.* ■

Korollar 2.57. *Sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus und sei $\dim V = \dim W < \infty$. Dann gilt:*

$$f \textit{ bijektiv} \iff f \textit{ injektiv} \iff f \textit{ surjektiv}$$

Beweis: Wir zeigen, f bijektiv $\Rightarrow f$ injektiv $\Rightarrow f$ surjektiv $\Rightarrow f$ bijektiv .

Die erste Implikation (bijektiv $\Rightarrow$ injektiv) ist trivial. ✓

(injektiv $\Rightarrow$ surjektiv) Da $\dim V = \dim W$ und $\dim\ker(f) = 0$, ist $\dim W = \dim V = \dim\ker(f) + \dim\operatorname{im}(f) = \dim\operatorname{im}(f)$. Der Homomorphismus f ist also surjektiv. ✓

(surjektiv $\Rightarrow$ bijektiv) Ist f surjektiv, so folgt aus $\dim V = \dim\ker(f) + \dim\operatorname{im}(f)$ direkt $\dim\ker(f) = 0$. Die surjektive lineare Abbildung f ist also auch injektiv, d.h. f ist bijektiv. ✓ ■

Do 7.12.2006

Proposition 2.58. *Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, $(w_1, \ldots, w_r)$ eine Basis von $\mathrm{im}(f)$ und seien $u_1, \ldots, u_r$ Vektoren aus V mit $f(u_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, r$. Definiere $U := \mathrm{span}(u_1, \ldots, u_r)$. Dann gilt:*

1. $V = U \oplus \ker(f)$
2. *Die Einschränkung $f_{|U} : U \to \mathrm{im}(f)$ ist ein Isomorphismus.*
3. *Ist $P : V \to U$ die Projektion auf U (bzgl. $V = U \oplus \ker(f)$), so gilt: $f = f_{|U} \circ P$, d.h. das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, "f"] & \\ U \arrow[r, "f_{|U}"'] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: Ad 1.: Sei $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von $\ker(f)$. Nach Proposition 2.53 ist $(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von V. Also ist V die direkte Summe von $U = \mathrm{span}(u_1, \ldots, u_r)$ und $\ker(f) = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k)$, d.h. $V = U \oplus \ker(f)$. ✓

Ad 2.: $f_{|U} : U \to \mathrm{im}(f)$ ist injektiv, da $\ker(f_{|U}) = U \cap \ker(f) = \{0\}$; $f_{|U}$ ist surjektiv, da $f(U) = f(U \oplus \ker(f)) = f(V) = \mathrm{im}(f)$. ✓

Ad 3.: Sei $v \in V$ und seien $u \in U$ und $w \in \ker(f)$ die (eindeutig bestimmten) Vektoren mit $v = u + w$. Nach Definition der Projektion P auf U ist $P(v) = u$. Da

$$f(v) = f(u + w) = f(u) + f(w) = f(u) = f_{|U}(u) = f_{|U}(P(v))$$

für alle $v \in V$ gilt, ist $f = f_{|U} \circ P$. ✓ ■

Kapitel 3

Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein **lineares Gleichungssystem** (systeme d'equations linéaires) mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ ist von der Form:

$$\left.\begin{array}{lcl} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n & = & b_m \end{array}\right\} (*)$$

Hierbei sind $a_{11},\ldots,a_{1n},a_{21},\ldots,a_{mn}$ sowie $b_1,\ldots,b_m$ Elemente aus $\mathbb{K}$ und $x_1,\ldots,x_n$ sind Variablen, d.h. Unbestimmte des linearen Gleichungssystems.

Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems besteht aus allen Vektoren $(x_1,\ldots,x_n)^T \in \mathbb{K}^n$, deren Einträge $x_1,\ldots,x_n$ eine simultane Lösung der obigen m Gleichungen bilden, z.B. ist die Lösungsmenge des reellen Gleichungssystems

$$x_1 + 2\cdot x_2 = 1, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

die Menge $\{\left(\begin{smallmatrix} 1-2\cdot\alpha \\ \alpha \end{smallmatrix}\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ und die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit Koeffizienten in $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \end{array}$$

ist die Menge $\{(\alpha+\beta, 1-\alpha-\beta, \alpha, \beta)^T \mid \alpha,\beta \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{Q}^4$.

Lineare Gleichungssysteme lassen sich effektiv mit Hilfe von Matrixen beschreiben. Seien $c_{11},\ldots,c_{1n},c_{21},\ldots,c_{mn}$ Elemente aus dem Körper $\mathbb{K}$. Die Anordnung dieser $m\cdot n$ Elemente in der Form

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

heisst $(m\times n)$-**Matrix** (matrice) mit Einträgen aus (oder Werten in) dem Körper $\mathbb{K}$. Abkürzend schreiben wir für $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ auch $(c_{ij})_{ij}$ oder einfach nur (c_{ij}).

Eine $(m \times n)$-Matrix hat also m Zeilen und n Spalten. Eine $(m \times 1)$-Matrix heisst Spaltenvektor, eine $(1 \times n)$-Matrix heisst Zeilenvektor. Wir definieren

$$\boxed{M(m \times n, \mathbb{K}) := \text{ Menge aller } (m \times n) - \text{Matrizen mit Einträgen aus } \mathbb{K}}$$

Für $C := (c_{ij})_{ij} \in M(m \times n, \mathbb{K})$ und $D := (d_{jk})_{jk} \in M(n \times r, \mathbb{K})$ ist das Produkt $C \cdot D$ eine $(m \times r)$-Matrix $(f_{ik})_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,r}}$ mit Einträgen

$$f_{ik} := \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot d_{jk} = c_{i1} \cdot d_{1k} + \ldots + c_{in} \cdot d_{nk}$$

Insbesondere ist für einen Spaltenvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in M(n \times 1, \mathbb{K})$ das Produkt $C \cdot x$ gleich

$$\begin{pmatrix} c_{11} \cdot x_1 + \ldots + c_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ c_{m1} \cdot x_1 + \ldots + c_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Betrachten wir erneut das lineare Gleichungssystem $(*)$

$$\begin{array}{lcl} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

Die **Koeffizientenmatrix** dieses Gleichungssystems ist definiert als die $(m \times n)$-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die $(m \times (n+1))$-Matrix

$$(A, b) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

heisst **erweiterte Koeffizientenmatrix**. Offensichtlich enthält (A, b) alle Informationen des linearen Gleichungssystems $(*)$.

Sei $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ und $x := (x_1, \ldots, x_n)^T$. Dann ist das Gleichungssystem $(*)$ äquivalent zu

$$A \cdot x = b$$

und die Lösungsmenge von $(*)$ ist

$$Sol(A, b) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = b\}$$

Das Gleichungssystem $(*)$ und seine Lösungsmenge kann also mit Hilfe der Matrix-Gleichung $A \cdot x = b$ beschrieben werden.

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$ wiederum definiert eine lineare Abbildung $\Phi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, die auf den kanonischen Basisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{K}^n$ die Werte

$$\Phi_A(e_1) := A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

$$\Phi_A(e_2) := A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \Phi_A(e_n) := A \cdot e_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

annimmt (wir erinnern uns, dass dadurch Φ_A eindeutig bestimmt ist, siehe Bemerkung 2.56). Die zu A assoziierte lineare Abbildung Φ_A bildet also den $j$ten Basisvektor e_j auf die $j$te Spalte der Matrix (aufgefasst als Element des $\mathbb{K}^m$) ab. Die Matrix-Gleichung übersetzt sich in $\Phi_A(x) = b$ und für die Lösungsmenge gilt

$$\mathit{Sol}(A, b) = \Phi_A^{-1}(b) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \Phi_A(x) = b\}$$

Zum Beispiel wird das lineare Gleichungssystem mit Koeffizienten in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

durch die Matrix-Gleichung

$$A \cdot x = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1100 \\ 0111 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^4$$

beschrieben. Der assoziierte Homomorphismus $\Phi_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ist eindeutig durch

$$\Phi_A(e_1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \Phi_A(e_2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \Phi_A(e_3) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \text{ und } \Phi_A(e_4) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$$

bestimmt. Ein beliebiges Element $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ wird unter Φ_A auf $\left(\begin{smallmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3+x_4 \end{smallmatrix}\right)$ abgebildet, da

$$\begin{aligned} \Phi_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \Phi_A(x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3 + x_4 \cdot e_4) \\ &= x_1 \cdot \Phi(e_1) + x_2 \cdot \Phi(e_2) + x_3 \cdot \Phi(e_3) + x_4 \cdot \Phi(e_4) \\ &= x_1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + x_2 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + x_3 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + x_4 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3+x_4 \end{smallmatrix}\right). \end{aligned}$$

Mi 13.12.2006

Wir kehren zur allgemeinen Situation zurück. Sei nun eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ und ein Vektor $b = (b_1, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{K}^m$ gegeben. Die Gleichung $\Phi(x) = b$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$, ist äquivalent zu einem linearen Gleichungssystem. Um dies zu sehen, definiere die Elemente $a_{ij} \in \mathbb{K}$ durch

$$\Phi(e_j) =: \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot f_i,$$

wobei $f_1, \ldots, f_m$ hier die kanonische Basis von $\mathbb{K}^m$ bezeichne. Dann ist

$$\Phi(x) = \Phi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \Phi(e_j) = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j \cdot \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot f_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j\right) f_i.$$

Also gilt

$$\Phi(x) = b \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, m\}$$

Die Gleichung $\Phi(x) = b$ beschreibt also ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Variablen. Ist A zum Gleichungssystem $(*)$ assoziiert und $\Phi = \Phi_A$, so erhalten wir auf diese Weise das ursprüngliche Gleichungssystem $(*)$ zurück.

Wir betrachten nun das lineare Gleichungssystem $(*)$ in dem Spezialfall $b = 0$. Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcl} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n & = & 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n & = & 0 \end{array}$$

heisst **homogen** (homogènes). Die Lösungsmenge ist gerade der Kern der assoziierten linearen Abbildung Φ_A:

$$Sol(A, 0) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = 0\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \Phi_A(x) = 0\} = \ker(\Phi_A).$$

Was können wir über die Lösungsmenge in Fall $b \neq 0$ aussagen?

1. Fall: $Sol(A, b) \neq \emptyset$, d.h. es gibt mindestens eine Lösung $x' \in \mathbb{K}^n$ der Matrix-Gleichung $A \cdot x = b$. Dann gilt:

$$x \in Sol(A, b) \Leftrightarrow A \cdot x = b \Leftrightarrow A \cdot (x - x') = 0 \Leftrightarrow y := x - x' \in \ker(\Phi_A)$$

Also ist in diesem Fall

$$Sol(A, b) = x' + \ker(\Phi_A) := \{x' + y \mid y \in \ker(\Phi_A)\} = \{x' + y \mid A \cdot y = 0\}$$

Die Lösungsmenge ist also der Untervektorraum $\ker(\Phi_A)$ um x' verschoben (man nennt solche Mengen affine Untervektorräume).

2. Fall: $Sol(A, b) = \emptyset$.

Wir halten die obige Diskussion in der folgenden Proposition fest.

Proposition 3.1. *Sei* $(*)$ *ein lineares Gleichungssystem mit Matrix-Gleichung* $A \cdot x = b$. *Dann gilt für die Lösungsmenge* $Sol(A, b)$*:*

Entweder die Lösungsmenge ist nicht leer und für ein gewähltes $x' \in Sol(A, b)$ *ist*

$$Sol(A, b) = x' + \ker(\Phi_A).$$

oder die Lösungsmenge ist leer. ■

Beispiel 3.2.

$$\begin{aligned} x_1 + 2 \cdot x_2 &= 3 \\ 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 &= \alpha \end{aligned}$$

hat für $\alpha \neq 6$ *keine Lösungen. Für* $\alpha = 6$ *ist die Lösungsmenge gleich*

$$\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 3 - 2 \cdot x_2\} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} -2\cdot\lambda \\ \lambda \end{smallmatrix}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \ker(\Phi_A),$$

mit $\Phi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x_1+2\cdot x_2 \\ 2\cdot x_1+4\cdot x_2 \end{smallmatrix}\right)$.

3.1 Der Gauss-Algorithmus

Der **Gauss-Algorithmus** oder das **Elimationsverfahren von Gauss** (méthode d'élimination de Gauss) ist ein Verfahren mit dem sich die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems effektiv bestimmen lässt. Wir beginnen die Diskussion für den Fall $m = n$ (d.h. das System hat genauso viele Gleichungen wie Variablen).

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n &= b_n \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich sofort lösen, wenn für $j < i$ alle Koeffizienten a_{ij} verschwinden und die Koeffizienten a_{ii} alle ungleich Null sind. In diesem speziellen Fall hat das Gleichungssystem die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \ldots & + & a_{1(n-1)}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \ldots & + & a_{2(n-1)}x_{n-1} & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & a_{33}x_3 & + & \ldots & + & a_{3(n-1)}x_{n-1} & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & & & & & \ddots & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & + & a_{(n-1)n}x_n & = & b_{n-1} \\ & & & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

mit $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0, \ldots, a_{nn} \neq 0$. Die Lösung dieses Gleichungssystems ist eindeutig und berechnet sich sukzessiv als

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, \quad x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{(n-1)n} \cdot x_n}{a_{(n-1)(n-1)}}, \quad \ldots$$

$$x_i = \frac{b_i - (\sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j)}{a_{ii}}, \quad \dots \quad , x_1 = \frac{b_1 - (\sum_{j=2}^n a_{1j} \cdot x_j)}{a_{11}}$$

Im Allgemeinen könen wir natürlich nicht annehmen, dass das Gleichungssystem diese einfache Gestalt hat. Es ist aber manchmal möglich das Gleichungssystem durch elementare Zeilenoperationen (siehe unten) in diese Form zu überführen (ohne die Lösungsmenge zu verändern!).

Beispiel 3.3.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2 \cdot x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 4 \cdot x_2 & - & 6 \cdot x_3 & = & 2 \end{array}$$

Die Lösungsmenge bleibt unverändern, wenn wir die erste Gleichung übernehmen, die zweite durch die zweite minus 2 *mal die erste ersetzen (notiert durch* $②-2\cdot①$*) und die dritte durch die dritte minus die erste ersetzen*

$$\begin{array}{rcrcrcll} x_1 & + & 2 \cdot x_2 & - & x_3 & = & 1 & \\ 0 & - & x_2 & + & 3 \cdot x_3 & = & 0 & ②-2\cdot① \\ 0 & + & 2 \cdot x_2 & - & 5 \cdot x_3 & = & 1 & ③-① \end{array}$$

Tatsächlich verändert sich die Lösungsmenge nicht, da wir durch Addition von 2 *mal der ersten Gleichung zu der neuen zweiten Gleichung und Addition der ersten zu der neuen dritten Gleichung das ursprüngliche Gleichungssystem zurückerhalten. Für das neue Gleichungssystem ist es einfacher die Lösungsmenge zu bestimmen, da die Variable* x_1 *nur noch in der ersten Gleichung auftaucht. Wir können nun fortfahren und durch Addition von* 2 *mal der zweiten (neuen) Gleichung zu der dritten (neuen) Gleichung die Variable* x_2 *in der dritten Gleichung eliminieren. Das Gleichungssystem, welches wir dann erhalten, hat die obige spezielle Form und die Lösungsmenge kann für dieses leicht bestimmt werden. Insgesamt führen wir die folgenden äquivalenten Umformungen des Gleichungssystems durch:*

$$\begin{array}{rcl} x_1+2x_2-x_3 & = & 1 \\ 2x_1+3x_2+x_3 & = & 2 \\ x_1+4x_2-6x_3 & = & 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcll} x_1+2x_2-x_3 & = & 1 & \\ -x_2+3x_3 & = & 0 & ②-2① \\ 2x_2-5x_3 & = & 1 & ③-① \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} x_1+2x_2-x_3 & = & 1 & \\ -x_2+3x_3 & = & 0 & \\ x_3 & = & 1 & ③+2② \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_2 = 3x_3 = 3 \\ x_1 = 1 + x_3 - 2x_2 = -4 \end{array}$$

Die Lösungsmenge des ursprünglichen Gleichungssystems ist also $\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

In dem obigen Beispiel haben wir das Gleichungssystem in eine einfache Form überführt, indem wir die folgende Zeilenoperation mehrfach benutzt haben.

(II) $\boxed{\text{Addition eines Vielfachen der } i\text{ten Zeile zu der } j\text{ten Zeile für } i \neq j.}$

Überlegen Sie, wieso solch eine Zeilenoperation die Lösungsmenge nicht verändert und warum es wichtig ist $i \neq j$ zu verlangen.

Die Umformungen des obigen Gleichungssystems können wir mit Hilfe der erweiterten Koeffizientenmatrix (A, b) kompakter notieren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -6 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Die Matrix A wird in diesem Beispiel in obere Dreieckgestalt überführt. Im Allgemeinen reicht die Zeilenoperation (II) nicht aus um dies zu erreichen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3.4.

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & -4x_2 & & +x_4 & = & -2 \\ -4x_1 & +8x_2 & +x_3 & -3x_4 & = & 6 \\ & x_2 & +3x_3 & & = & 0 \\ x_1 & & & -\frac{1}{2}x_4 & = & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 2x_1 & -4x_2 & & +x_4 & = & -2 \\ & & x_3 & -x_4 & = & 2 \\ & x_2 & +3x_3 & & = & 0 \\ & 2x_2 & & -x_4 & = & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ ② + 2 \cdot ① \\ \\ ④ - \frac{1}{2} \cdot ① \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 2x_1 & -4x_2 & & +x_4 & = & -2 \\ & x_2 & +3x_3 & & = & 0 \\ & 2x_2 & & -x_4 & = & 2 \\ & & x_3 & -x_4 & = & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 2x_1 & -4x_2 & & +x_4 & = & -2 \\ & x_2 & +3x_3 & & = & 0 \\ & & -6x_3 & -x_4 & = & 2 \\ & & x_3 & -x_4 & = & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ ③ - 2 \cdot ② \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 2x_1 & -4x_2 & & +x_4 & = & -2 \\ & x_2 & +3x_3 & & = & 0 \\ & & -6x_3 & -x_4 & = & 2 \\ & & & -\frac{7}{6}x_4 & = & \frac{7}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ ④ + \frac{1}{6} \cdot ③ \end{array} \quad \Leftrightarrow x_4 = -2, x_3 = x_2 = x_1 = 0$$

Hier wurden an einer Stelle Zeilen vertauscht, alle anderen Umformungen waren Zeilenoperationen vom Typ (II). Kompakter lassen sich die Umformungen mit der erweiterten Koeffizientenmatrix (A, b) notieren:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ -4 & 8 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{6} & \frac{7}{3} \end{array}\right) \Leftrightarrow x_4 = -2, x_3 = x_2 = x_1 = 0$$

Definition 3.5. *Die Operationen*

(I) *Vertauschen von zwei Zeilen*

(II) *Addition eines Vielfachen der $i$ten Zeile zu der der $j$ten Zeile für $i \neq j$.*

(III) *Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$*

heissen **elementare Zeilenoperationen** (opérations élémentaires).

Bemerkung 3.6. *Ist (A,b) die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems und $(\widetilde{A},\widetilde{b})$ das Resultat von endlich vielen elementaren Zeilenoperationen, so ist $Sol(A,b) = Sol(\widetilde{A},\widetilde{b})$.*

Mit Zeilenoperationen vom Typ (I) und (II) kann eine Matrix immer in eine spezielle Form, die Zeilen-Stufen-Form (siehe unten), gebracht werden.

Beispiel 3.7.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 7 & 11 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 7 & 11 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\rightsquigarrow③-①} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 10 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{②\leftrightarrow③} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \end{array}\right)$$

Definition 3.8. *Eine $(m \times n)$ Matrix $B = (b_{ij})$ hat* **Zeilen-Stufen-Form** (échelonnée)*, wenn für jedes i gilt:*

$$b_{i1} = b_{i2} = \ldots = b_{is} = 0 \implies b_{k1} = b_{k2} = \ldots = b_{ks} = b_{k(s+1)} = 0 \quad \forall\, k > i$$

Zum Beispiel ist das Ergebnis der Umformungen im obigen Beispiel in Zeilen-Stufen-Form.

Offensichtlich lässt sich jede Matrix durch Zeilenoperationen vom Typ (I) und (II) in Zeilen-Stufen-Form bringen. Ein Flussdiagramm (flowchart) für den Ablauf dieses Algorithmus (Gauss-Algorithmus) findet sich zum Beispiel in dem Buch *Lineare Algebra und analytische Geometrie I* von E. Brieskorn auf Seite 426. Wir halten fest

Proposition 3.9. *Eine Matrix $B \in M(m \times n, \mathbb{K})$ lässt sich durch endlich viele Zeilenoperationen vom Typ (I) und (II) in Zeilen-Stufen-Form bringen.* ■

Do 14.12.2006

Ist die Matrix in Zeilen-Stufen-Form, so kann die Lösungsmenge leicht berechnet werden. Nach Umnumerieren der Variablen x_i (Vertauschen der entsprechenden Spalten) hat die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\widetilde{A},\widetilde{b})$ die Form

$$(\widetilde{A},\widetilde{b}) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} \widetilde{a}_{11} & * & * & \ldots & * & \ldots & * & \widetilde{b}_1 \\ 0 & \widetilde{a}_{22} & * & \ldots & * & \ldots & * & \widetilde{b}_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \ldots & * & \ldots & * & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \widetilde{a}_{rr} & * & \ldots & * & \widetilde{b}_r \\ \hline 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \widetilde{b}_{r+1} \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \widetilde{b}_m \end{array}\right),$$

wobei die Diagonalelemente $\widetilde{a}_{11}, \ldots, \widetilde{a}_{rr}$ alle ungleich 0 sind. Wie sieht die Lösungsmenge $Sol(\widetilde{A},\widetilde{b})$ aus?

<u>1. Fall:</u> $\widetilde{b}_{r+1} = \ldots = \widetilde{b}_m = 0$. Dann sind die letzten $(n-r)$ Variablen $x_{r+1}, \ldots, x_n$ in $\mathbb{K}$ frei wählbar und es gilt

$$x_r = \frac{\widetilde{b}_r - (\widetilde{a}_{r(r+1)} \cdot x_{r+1} + \ldots + \widetilde{a}_{rn} \cdot x_n)}{\widetilde{a}_{rr}},$$

$$x_{r-1} = \frac{\widetilde{b}_{r-1} - \sum_{j=r}^{n} \widetilde{a}_{(r-1)j} \cdot x_j}{\widetilde{a}_{(r-1)(r-1)}}, \ldots, x_1 = \frac{\widetilde{b}_1 - \sum_{j=2}^{n} \widetilde{a}_{1j} \cdot x_j}{\widetilde{a}_{11}}$$

<u>2. Fall:</u> $\widetilde{b}_{r+1}, \widetilde{b}_{r+2}, \ldots, \widetilde{b}_m$ sind nicht alle gleich Null. Dann ist die Lösungsmenge $Sol(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ leer.

Um im 1. Fall die Lösungsmenge des ursprünglichen linearen Gleichungssystems aus $Sol(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ zu erhalten muss die Umnumerierung rückgängig gemacht werden. Im 2. Fall besitzt auch das ursprüngliche lineare Gleichungssystem keine Lösung. Wir halten die Diskussion in der folgenden Proposition fest.

Proposition 3.10. *Sei (A, b) die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems und sei $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ in Zeilen-Stufen-Form das Resultat des Gauss-Algorithmus angewandt auf (A, b). Dann gilt:*

1. *$Sol(A, b) = Sol(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ ist genau dann nicht leer, wenn $\widetilde{b}_{r+1} = \ldots = \widetilde{b}_m = 0$.*

2. *Ist das Gleichungssystem homogen (d.h. $b = 0$), so ist auch $\widetilde{b} = 0$. In diesem Fall ist $Sol(A, 0) = Sol(\widetilde{A}, 0)$ ein Untervektorraum W des $\mathbb{K}^n$ der Dimension $n - r$.*

3. *Ist $b \neq 0$ und besitzt das Gleichungssystem eine Lösung x', so ist $Sol(A, b) = x' + W$.* ■

Beispiel 3.11. *Sei*

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}\right)$$

Der Gauss-Algorithmus liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & -3 & -6 & -18 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =: (\widetilde{A}, \widetilde{b})$$

Das Ergebnis $(\widetilde{A},\widetilde{b})$ *ist in Zeilen-Stufen-Form ($r = 2$). Da* $\widetilde{b}_3 \neq 0$*, ist die Lösungsmenge* $Sol(A,b)$ *leer. Für das homogene Gleichungssystem liefert der Gauss-Algorithmus*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems ist ein Untervektorraum $W \subset \mathbb{R}^3$ *der Dimension* $n - r = 3 - 2 = 1$ *(also eine Gerade).*

3.2 Lineare Abbildungen und Matrizen

Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume der Dimension n und m und sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wie können wir Φ durch eine Matrix beschreiben?

Sei $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und sei $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W. Wir definieren $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$ durch

$$\Phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i, \quad j = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

Definition 3.12. *Die Matrix A ist die Matrix, die Φ bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$* **darstellt***. A ist die* **darstellende Matrix** (matrice associée) *von Φ bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.*

Da sich ein Vektor eindeutig als Linearkombination einer Basis schreiben lässt, ist A nach Wahl der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ eindeutig durch Φ festgelegt. Umgekehrt definiert eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$ (zusammen mit den gewählten Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$) eindeutig einen Homomorphismus $\Phi : V \to W$ via der Formel $(*)$.

Die Wahl einer Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V definiert einen Isomorphismus

$$\Psi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} V, \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T \mapsto \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j.$$

Umgekehrt definiert ein Isomorphismus $\mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} V$ eine Basis, die durch die Bilder der kanonischen Basis des $\mathbb{K}^n$ unter dem Isomorphismus gegeben ist.

Ist $\Psi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^m \to W$ der Isomorphismus, der durch die Basis $\mathcal{B}$ gegeben ist, so erhalten wir das folgende kommutative Diagramm, in dem der untere horizontale Pfeil Ψ durch $\Psi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi \circ \Psi_{\mathcal{A}}$ definiert ist:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Phi"] & W \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\Psi_{\mathcal{A}}", "\cong"'] \arrow[r, "\Psi"'] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\cong", "\Psi_{\mathcal{B}}"'] \end{tikzcd}$$

Die darstellende Matrix A von Φ bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist dann gerade die darstellende Matrix A_Ψ von Ψ bzgl. der kanonischen Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von $\mathbb{K}^n$ und der kanonischen Basis $(f_1, \ldots, f_m)$ von $\mathbb{K}^m$. Wir halten die Diskussion in der folgenden Proposition fest.

Proposition 3.13. *In der obigen Situation ist die darstellende Matrix A von Φ bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gleich A_Ψ und der zu A assoziierte Homomorphismus $\Phi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist gleich Ψ.* ■

Mi 20.12.2006

Beispiele 3.14. 1. *Sei*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]_2, \quad (a_1, a_2, a_3)^T \mapsto (a_1 + a_2 + a_3) + a_3 \cdot x + a_2 \cdot x^2.$$

Dann ist die darstellende Matrix von f bzgl. der kanonische Basis (e_1, e_2, e_3) von $\mathbb{R}^3$ und der Basis $(1, x, x^2)$ von $\mathbb{R}[x]_2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *Sei nun $V := \{(a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$ und sei*

$$\Phi := f_{|V} : V \to \mathbb{R}[x]_2$$

die Einschränkung von f auf V. Wir wollen Φ bzgl. der Basis $\mathcal{A} := ((1, -1, 0)^T, (0, 1, -1)^T)$ von V und der Basis $\mathcal{B} := (1, x, x^2)$ von $\mathbb{R}[x]_2$ beschreiben:

Da $\Phi((1, -1, 0)^T) = -x^2$ und $\Phi((0, 1, -1)^T) = -x + x^2$, ist die darstellende Matrix von Φ bzgl dieser Basen gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition 3.15. *Für $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W sei*

$$Hom(V, W) := \{\Phi : V \to W \mid \Phi \textit{ linear }\}$$

die Menge aller Homomorphismen von V nach W.

$$End(V) := Hom(V, V)$$

bezeichne die Menge der **Endomorphismen** *$\Phi : V \to V$ und*

$$Aut(V) := \{\Phi \in End(V) \mid \Phi \textit{ invertierbar }\}$$

die Menge der Automorphismen (= invertierbaren Endomorphismen) von V.

Das nächste Lemma zeigt, dass $Hom(V, W)$ und $End(V)$ Vektorräume sind.

Lemma 3.16. 1. *Sei X eine nichtleere Menge und Z ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist $Map(X, \mathbb{Z})$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum bzgl. der Addition*

$$(f + \tilde{f})(x) := f(x) + \tilde{f}(x) \quad \textit{für alle } x \in X$$

und bzgl. der skalaren Multiplikation

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad \textit{für alle } x \in X.$$

2. *$Hom(V,W)$ ist ein Untervektorraum von $Map(V,W)$. Insbesondere ist $End(V)$ ein Untervektorraum von $Map(V,V)$.*

Beweis: Ad 1.: Dies folgt durch direktes Nachrechnen der Vektorraum-Axiome (Übungsaufgabe).

Ad 2.: Wir zeigen das Untervektorraum-Kriterium, d.h. wir zeigen, dass die Menge $Hom(V,W)$ nichtleer ist und abgeschlossen bzgl. Addition und skalarer Multiplikation ist.

Offensichtlich ist $Hom(V,W)$ nicht die leere Menge, da sie die Null-Abbildung $V \to W$, $v \mapsto 0$, enthält.

Nun zur Abgeschlossenheit in $Map(V,W)$. Sind Φ und $\widetilde{\Phi} \in Hom(V,W)$, dann ist $\Phi + \widetilde{\Phi} \in Hom(V,W)$, da die Summe von linearen Abbildungen wieder linear ist:

$$(\Phi + \widetilde{\Phi})(\lambda \cdot v + v') = \Phi(\lambda \cdot v + v') + \widetilde{\Phi}(\lambda \cdot v + v')$$

$$= (\lambda \cdot \Phi(v) + \Phi(v')) + (\lambda \cdot \widetilde{\Phi}(v) + \widetilde{\Phi}(v')) = \lambda \cdot (\Phi + \widetilde{\Phi})(v) + (\Phi + \widetilde{\Phi})(v') \quad \checkmark$$

Für $\mu \in \mathbb{K}$ und $\Phi \in Hom(V,W)$ ist $\mu \cdot \Phi$ auch linear:

$$(\mu \cdot \Phi)(\lambda \cdot v + v') = \mu \cdot (\Phi(\lambda \cdot v + v'))$$

$$= \mu \cdot (\lambda \cdot \Phi(v) + \Phi(v')) = \lambda \cdot (\mu \cdot \Phi)(v) + (\mu \cdot \Phi)(v') \quad \checkmark.$$

Dies zeigt die Abgeschlossenheit. Nach dem Untervektorraum-Kriterium ist also $Hom(V,W)$ ein Untervektorraum von $Map(V,W)$.

Ad 3.: Dies ist ein Spezialfall von 2. ■

Erinnerung 3.17. *$M(m \times n, \mathbb{K})$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

Definition 3.18. *Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume der Dimension n und m mit Basen $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$. Sei*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : Hom(V,W) \to M(m \times n, \mathbb{K}),$$

die Abbildung, die einem Homomorphismus Φ die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi)$ bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zuordnet. Explizit sind die Einträge a_{ij} von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi)$ durch die Gleichungen $\Phi(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot w_i$, $j = 1, \ldots, n$ bestimmt.

Proposition 3.19. *$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen.*

Beweis: $\underline{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi) \text{ ist linear:}}$ Sei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix zu Φ (bzgl. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$) und sei $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})$ die darstellende Matrix zu $\widetilde{\Phi} \in Hom(V,W)$, d.h.

$$\Phi(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot w_i \text{ und } \widetilde{\Phi}(v_j) = \sum_{i=1}^m \widetilde{a}_{ij} \cdot w_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Dann ist

$$(\Phi + \widetilde{\Phi})(v_j) = \Phi(v_j) + \widetilde{\Phi}(v_j) = (\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot w_i) + (\sum_{i=1}^m \widetilde{a}_{ij} \cdot w_i) = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + \widetilde{a}_{ij}) \cdot w_i.$$

Also ist $A + \widetilde{A} = (a_{ij} + \widetilde{a}_{ij})$ die darstellende Matrix zu $\Phi + \widetilde{\Phi}$ (bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$) und somit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi + \widetilde{\Phi}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi) + M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\widetilde{\Phi}). \quad \checkmark$$

Auf ähnliche Weise rechnet man nach, dass die darstellende Matrix zu $\mu \cdot \Phi$ gerade $\mu \cdot A = (\mu \cdot a_{ij})$ ist, also

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mu \cdot \Phi) = \mu \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi)$$

gilt. Dies zeigt die Linearität von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

$\underline{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \text{ injektiv:}}$ $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi) = 0 \implies \Phi(v_j) = 0 \;\forall\, j \implies \Phi = 0. \quad \checkmark$

$\underline{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \text{ surjektiv:}}$ Sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{K})$ gegeben. Definiere $\Phi : V \to W$ durch $\Phi(v_j) := \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i$, $j = 1, \ldots, n$. Dann ist $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi) = A. \quad \checkmark$

Die Abbildung $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : Hom(V, W) \to M(m \times n, \mathbb{K})$ ist also ein injektiver, surjektiver Homomorphismus, d.h. ein Isomorphismus. ■

Korollar 3.20. *Ist V n-dimensional und W m-dimensional, so ist die Dimension von $Hom(V, W)$ gleich $m \cdot n$.* ■

Sind $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ und $\mathcal{C} = (z_1, \ldots, z_r)$ Basen der Vektorräume V, W und Z und sind $\Phi : V \to W$ und $\widetilde{\Phi} : W \to Z$ lineare Abbildungen mit darstellenden Matrizen $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi)$ und $\widetilde{A} := M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\widetilde{\Phi})$, so ist die darstellende Matrix von $\widetilde{\Phi} \circ \Phi : V \to Z$ (bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$) das Produkt von $\widetilde{A}$ und A.

Proposition 3.21. $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(\widetilde{\Phi} \circ \Phi) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\widetilde{\Phi}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi)$.

Beweis: Mit der obigen Notation folgt:

$$\begin{aligned}(\widetilde{\Phi} \circ \Phi)(v_j) = \widetilde{\Phi}(\Phi(v_j)) = \widetilde{\Phi}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot w_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot \widetilde{\Phi}(w_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot (\sum_{k=1}^{r} \widetilde{a}_{ki} z_k) \\ = \sum_{k=1}^{r}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot \widetilde{a}_{ki}) z_k = \sum_{k=1}^{r}(\sum_{i=1}^{m} \widetilde{a}_{ki} \cdot a_{ij}) z_k\end{aligned}$$

Nun ist $\sum_{i=1}^{m} \widetilde{a}_{ki} \cdot a_{ij}$ der Eintrag in der $k$ten Zeile und $j$ten Spalte in der Matrix $\widetilde{A} \cdot A$. Sind b_{kj} die Einträge von $\widetilde{A} \cdot A$, so ist also

$$(\widetilde{\Phi} \circ \Phi)(v_j) = \sum_{k=1}^{r} b_{kj} \cdot z_j$$

und somit $\widetilde{A} \cdot A$ die darstellende Matrix von $\widetilde{\Phi} \circ \Phi$ bzgl. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$, d.h. es gilt:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(\widetilde{\Phi} \circ \Phi) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\widetilde{\Phi}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi)$$

■

Do 21.12.2006

TEST!

Mi 10.01.2007

Beispiel 3.22. *Sei $V := \mathbb{R}[x]_3$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 3. Die Vektoren $\mathcal{A} := (1, x, x^2, x^3)$ bilden eine Basis von V. Sei $W := \mathbb{R}[x]_2$ versehen mit der Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ und sei $Z := \mathbb{R}[x]_1$ versehen mit der Basis $\mathcal{C} := (1, x)$. Wir betrachten die linearen Abbildungen $\Phi : V \to W, \quad p \mapsto p'$ und $\widetilde{\Phi} : W \to Z, \quad p \mapsto p'$ (p' ist die Ableitung von p nach x).*

Die darstellende Matrix zu Φ bzgl. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

die zu $\widetilde{\Phi}$ bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ist

$$\widetilde{A} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\widetilde{\Phi}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es lässt sich leicht überprüfen, dass die Matrix

$$\widetilde{A} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

die darstellende Matrix zu $\widetilde{\Phi} \circ \Phi$ bzgl. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ ist, d.h. es gilt:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(\widetilde{\Phi} \circ \Phi) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\widetilde{\Phi}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\Phi)$$

Wir betrachten nun den Spezialfall $V = W$ und $\dim V = n$. Die darstellenden Matrizen von Endomorphismen von V sind also $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen in dem Körper $\mathbb{K}$. Auf dem Vektorraum $M(n \times n, \mathbb{K})$ ist eine Multiplikation durch Matrixmultiplikation gegeben

$$M(n \times n, \mathbb{K}) \times M(n \times n, \mathbb{K}) \to M(n \times n, \mathbb{K}), \quad (A, A') \mapsto A \cdot A'$$

Die Matrix

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ist neutrales Element bzgl. der Multiplikation, da offensichtlich für alle $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ gilt: $E_n \cdot A = A \cdot E_n = A$.

Tatsächlich ist $M(n \times n, \mathbb{K})$ ein Ring. Dies folgt aus den folgenden Rechenregeln.

Rechenregeln 3.23 (für Matrizen)**.** *Seien $A, A' \in M(m \times n, \mathbb{K})$, $B, B' \in M(r \times m, \mathbb{K})$, $C \in M(s \times r, \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann gilt:*

1. $(B+B') \cdot A = B \cdot A + B' \cdot A$, $B \cdot (A+A') = B \cdot A + B \cdot A'$ *(Distributivgesetz)*
2. $(\lambda \cdot B) \cdot A = B \cdot (\lambda \cdot A) = \lambda \cdot (B \cdot A)$
3. $(C \cdot B) \cdot A = C \cdot (B \cdot A)$ *(Assoziativgesetz)*
4. $(B \cdot A)^T = A^T \cdot B^T$
5. $E_m \cdot A = A \cdot E_n = A$

Beweis: Die Aussagen 1., 2. und 5. folgen durch direktes Nachrechnen (Übungsaufgabe).

Ad 3: Die Matrizen A, B, C definieren lineare Abbildungen Φ_A, Φ_B, Φ_C

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{\Phi_A} \mathbb{K}^m \xrightarrow{\Phi_B} \mathbb{K}^r \xrightarrow{\Phi_C} \mathbb{K}^s$$

via $\Phi_A(v) := A \cdot v$ etc. Nach Proposition 3.21 wird der Homomorphismus $\Phi_B \circ \Phi_A$ durch $B \cdot A$ und der Homomorphismus $\Phi_C \circ \Phi_B$ durch $C \cdot B$ dargestellt. Also gilt:

$$C \cdot (B \cdot A) = \Phi_C \circ (\Phi_B \circ \Phi_A) = (\Phi_C \circ \Phi_B) \circ \Phi_A = (C \cdot B) \cdot A \quad \checkmark$$

Ad 4: Sei $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \in M(m \times n, \mathbb{K})$ und $a'_{ji} := a_{ij}$. Dann ist

$$A^T = (a_{ij})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,m}} = (a'_{ji})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,m}}$$

Sei $B = (b_{ki})_{\substack{k=1,\ldots,r \\ i=1,\ldots,m}}$ und $b'_{ik} := b_{ki}$, also $B^T = (b'_{ik})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,r}}$. Schliesslich sei d_{jk} der Eintrag in der $j$ten Zeile und $k$ten Spalte von $A^T \cdot B^T$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A^T \cdot B^T &= (d_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,r}} \\ \Longrightarrow\ (a'_{ji}) \cdot (b'_{ik}) &= (d_{jk}) \\ \Longrightarrow\ d_{jk} &= \sum_{i=1}^{m} a'_{ji} \cdot b'_{ik} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} \cdot a_{ij} \end{aligned}$$

Also ist d_{jk} der Eintrag in der $k$ten Zeile und $j$ten Spalte von $B \cdot A$, d.h. der Eintrag in der $j$ten Zeile und $k$ten Spalte von $(B \cdot A)^T$. Die obere Rechnung zeigt also

$$(B \cdot A)^T = A^T \cdot B^T. \quad \checkmark$$

■

Korollar 3.24. *$M(n \times n, \mathbb{K})$ ist ein Ring mit Einselement E_n.* ■

Bemerkungen 3.25.

1. *$M(n \times n, \mathbb{K})$ ist für $n > 1$ nicht kommutativ: Für $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist $A \cdot B \neq B \cdot A$*
2. *$M(n \times n, \mathbb{K})$ ist für $n > 1$ nicht nullteilerfrei: $A \neq 0$, aber $A^2 = 0$.*

3. *Für quadratische Matrizen gilt im Allgemeinen nicht* $A^T \cdot B^T = (A \cdot B)^T$.

Auf ähnliche Weise zeigt man (Übungsaufgabe)

Proposition 3.26. *Der* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $End(V) := Hom(V, V)$ *ist zusammen mit der Multiplikation* $\circ$ *ein Ring, das Einselement ist die Identität* id_V. ■

Wir nennen $End(V)$ den **Endomorphismenring** von V und $M(n \times n, \mathbb{K})$ den **Matrizenring**. Aus Proposition 3.19 und Proposition 3.21 folgt das

Korollar 3.27. *Ist* $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ *eine Basis von* V*, so ist*

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} : End(V) \to M(n \times n, \mathbb{K})$$

ein Ring-Isomorphismen.

Beweis: Nach Proposition 3.19 ist $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen, nach Proposition 3.21 ist $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\widetilde{\Phi} \circ \Phi) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\widetilde{\Phi}) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\Phi)$. ■

Definition 3.28. *Eine quadratische Matrix* $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ *heisst* **invertierbar***, wenn es* $A' \in M(n \times n, \mathbb{K})$ *gibt mit* $A \cdot A' = E_n = A' \cdot A$*. Sei* $Gl_n(\mathbb{K}) := \{A \in M(n \times n, \mathbb{K}) \mid A \text{ invertierbar}\}$*.* $Gl_n(\mathbb{K})$ *heisst* **allgemeine lineare Gruppe** (groupe linéaire).

Bemerkung 3.29. $Gl_n(\mathbb{K})$ *ist tatsächlich eine Gruppe.*

Beweis: Sind A' und B' Inverse zu A und B, so ist $B' \cdot A'$ Inverses zu $A \cdot B$. Also ist $Gl_n(\mathbb{K})$ abgeschlossen bzgl. Multiplikation. Die Multiplikation ist assoziativ. Das neutrale Element ist E_n. Schliesslich hat nach Definition von $Gl_n(\mathbb{K})$ jedes Element von $Gl_n(\mathbb{K})$ ein Inverses. ■

Nach Lemma 1.19 ist das Inverse A' zu A eindeutig bestimmt.

Bemerkung 3.30. $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} : End(V) \to M(n \times n, \mathbb{K})$ *bildet die Automorphismengruppe* $Aut(V)$ *isomorph auf* $Gl_n(\mathbb{K})$ *ab.*

Bemerkung 3.31. $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ *ist genau dann invertierbar, wenn* A^T *invertierbar ist.*

Beweis: Ist A^{-1} das Inverse zu A, so gilt

$$(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = E_n^T = E_n$$

und

$$A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = E_n^T = E_n$$

■

Do 11.01.2007

Notation: In Zukunft bezeichnen wir die zu der Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ assoziierte lineare Abbildung $\Phi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto A \cdot x$, einfach nur mit A, d.h. wir identifizieren A mit Φ_A.

Als nächstes beschreiben wir den Basiswechsel. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und seien $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ zwei Basen von V. Wir erinnern uns, dass die Basis $\mathcal{A}$ einem Isomorphismus $\Psi_\mathcal{A} : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} V$, $(x_1, \dots, x_n)^T \to \sum x_i \cdot v_i$, entspricht. Sei $\Psi_\mathcal{B}$ der durch $\mathcal{B}$ definierte Isomorphismus.

Die Matrix $T^\mathcal{A}_\mathcal{B} := \Psi_\mathcal{B}^{-1} \circ \Psi_\mathcal{A} \in Gl_n(\mathbb{K})$ heisst **Transformationsmatrix** des Basiswechsel. Nach Definition von $T^\mathcal{A}_\mathcal{B}$ gilt: Ist $v = \sum x_i v_i = \sum y_i w_i$, so ist

$$T^\mathcal{A}_\mathcal{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Für einen Vektor $v \in V$ heissen die Einträge von $\Psi_\mathcal{A}^{-1}(v) \in \mathbb{K}^n$ die **Koordinaten** von v bzgl. der Basis $\mathcal{A}$. Mit $T^\mathcal{A}_\mathcal{B}$ können also aus den *alten* Koordinaten (den Koordinaten bzgl. $\mathcal{A}$) die *neuen* Koordinaten (die Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}$) berechnet werden.

Ist $V = \mathbb{K}^n$ und $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i \in \mathbb{K}^n$, eine Basis von V, so ist der zugehörige Isomorphismus $\Psi_\mathcal{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ gegeben durch Matrixmultiplikation mit der Matrix A, die als $i$te Spalte den $i$ten Basisvektor v_i hat, d.h.

$$\Psi_\mathcal{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad x \mapsto A \cdot x, \text{ mit } A = (v_1 \dots v_n)$$

Ist B die Matrix mit Spalten $w_1, \dots, w_n$, so ist die Transformationsmatrix

$$T^\mathcal{A}_\mathcal{B} = B^{-1} \cdot A.$$

Im allgemeinen Fall kann die Transformationsmatrix als darstellende Matrix der Identität aufgefasst werden:

$$M^\mathcal{A}_\mathcal{B}(id_V) = \Psi_\mathcal{B}^{-1} \circ id_V \circ \Psi_\mathcal{A} = \Psi_\mathcal{B}^{-1} \circ \Psi_\mathcal{A} = T^\mathcal{A}_\mathcal{B}.$$

Sei jetzt f ein beliebiger Endomorphismus von V und, wie zuvor, $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen von V. Die darstellenden Matrizen für f bzgl. der jeweiligen Basen stehen dann folgendermassen zueinander in Beziehung:

$$M^\mathcal{B}_\mathcal{B}(f) = T^\mathcal{A}_\mathcal{B} \cdot M^\mathcal{A}_\mathcal{A}(f) \cdot (T^\mathcal{A}_\mathcal{B})^{-1}.$$

Mit anderen Worten: Ist A die darstellende Matrix von f bzgl. $\mathcal{A}$ und ist B die darstellende Matrix von f bzgl. $\mathcal{B}$, so gibt es eine invertierbare Matrix S ($S = T^\mathcal{A}_\mathcal{B}$) mit

$$B = S \cdot A \cdot S^{-1}$$

(Man kann sich leicht überlegen, dass jedes $S \in Gl_n(\mathbb{K})$ durch ein geeignetes Paar von Basen realisiert werden kann.)

Definition 3.32. *Zwei Matrizen $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ heissen* **ähnlich** *oder* **konjugiert**, *wenn es ein $S \in Gl_n(\mathbb{K})$ mit $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$ gibt.*

Schliesslich betrachten wir noch den Fall von zwei verschiedenen Vektorräumen. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und W ein m-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Basen von V und $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Basen von W. Dann gilt (folgt durch direktes Nachrechnen in dem entsprechenden kommutativen Diagramm):

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(f) = T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(f) \cdot (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1}.$$

Definieren wir $S := T_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}$ und $T := T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, so gilt also die **Transformationsformel**:

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(f) = S \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(f) \cdot T^{-1}$$

Definition 3.33. *Zwei Matrizen $A, B \in M(m \times n, \mathbb{K})$ heissen* **äquivalent***, wenn es $S \in Gl_m(\mathbb{K})$ und $T \in Gl_n(\mathbb{K})$ mit $B = S \cdot A \cdot T^{-1}$ gibt.*

Bemerkung 3.34.

1. *Zwei Matrizen A, B sind genau dann äquivalent, wenn sie bzgl. geeigneter Wahl von Basen-Paaren $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ und $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ die gleiche lineare Abbildung darstellen.*

2. *Zwei quadratische Matrizen A, B sind genau dann ähnlich, wenn sie bzgl. geeigneter Wahl von Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ den gleichen Endomorphismus beschreiben.*

Definition 3.35.

1. *Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ heisst*

$$\mathrm{rg}(f) := \dim(\mathrm{im}(f))$$

   der **Rang** (rang) *von f.*

2. *Für eine Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ ist der Rang von A, $\mathrm{rg}(A)$, definiert als der Rang der linearen Abbildung $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto A \cdot x$.*

   Der **Zeilenrang** *von A, $\mathrm{ZR}(A)$, ist die Dimension des Untervektorraums in $\mathbb{K}^n$, der von den Zeilen von A aufgespannt wird, der* **Spaltenrang** *von A, $\mathrm{SR}(A)$, ist die Dimension des Untervektorraums in $\mathbb{K}^m$, der von den Spalten von A aufgespannt wird.*

Bemerkungen 3.36.

1. *Da das Bild von $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto A \cdot x$, genau aus den Linearkombinationen der Spalten besteht, ist $\mathrm{SR}(A) = \mathrm{rg}(A)$.*

2. *Offensichtlich ist $\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{SR}(A^T)$*

3. *Für eine $(n \times n)$-Matrix A gilt:*

$$\mathrm{SR}(A) = n \iff A \text{ invertierbar} \iff A^T \text{ invertierbar} \iff \mathrm{ZR}(A) = n$$

4. *$\mathrm{ZR}(A)$ ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen Zeilen von A.*

5. *$\mathrm{SR}(A)$ ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen Spalten von A.*

Mi 17.01.2007

Proposition 3.37. *Für jede Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ gilt $\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{SR}(A)$.*

Beweis: Sei r der Rang von $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Wir wählen eine Basis $(w_1, \ldots, w_r)$ von $\mathrm{im}(A)$ und eine Basis $(v_1, \ldots, v_{n-r})$ von $\ker(A)$. Wähle $u_1, \ldots, u_r$ mit $A(u_i) = w_i$ Nach Proposition 2.53 ist $\mathcal{A} = (u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{n-r})$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$. Nach dem Basisergänzungsatz 2.37 können wir $w_1, \ldots, w_r$ zu einer Basis $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ des $\mathbb{K}^m$ ergänzen. Die darstellende Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)$ hat dann die Form

$$B := M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich gilt $\mathrm{ZR}(B) = \mathrm{SR}(B)$. Wir wollen hieraus schliessen, dass auch $\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{SR}(A)$ gilt.

Nach der Transformationsformel gibt es $S \in Gl_m(\mathbb{K})$ und $T \in Gl_n(\mathbb{K})$ mit $B = S \cdot A \cdot T^{-1}$.

Beh. 1: $\mathrm{SR}(S \cdot A \cdot T^{-1}) = \mathrm{SR}(A)$

Bew.: Da $\mathrm{im}(S \cdot A \cdot T^{-1}) = S \cdot A \cdot T^{-1}(\mathbb{K}^n) = S \cdot A(\mathbb{K}^n) = \mathrm{im}(S \cdot A)$ und $\mathrm{rg}(A) = \dim A(\mathbb{K}^n) = \dim S(A(\mathbb{K}^n)) = \mathrm{rg}(S \cdot A)$, ist $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(S \cdot A) = \mathrm{rg}(S \cdot A \cdot T^{-1})$. Also gilt

$$\mathrm{SR}(S \cdot A \cdot T^{-1}) = \mathrm{SR}(A). \quad \checkmark$$

Beh. 2: $\mathrm{ZR}(S \cdot A \cdot T^{-1}) = \mathrm{ZR}(A)$.

Bew.: Da der Zeilenrang einer Matrix gleich dem Spaltenrang der transponierten Matrix ist, gilt

$$\mathrm{ZR}(S \cdot A \cdot T^{-1}) = \mathrm{SR}((S \cdot A \cdot T^{-1})^T) = \mathrm{SR}((T^{-1})^T \cdot A^T \cdot S^T)$$

Mit Beh. 1 folgt $\mathrm{SR}((T^{-1})^T \cdot A^T \cdot S^T) = \mathrm{SR}(A^T) = \mathrm{ZR}(A)$. $\checkmark$

Insgesamt erhalten wir

$$\mathrm{ZR}(A) \overset{\text{Beh.2}}{=} \mathrm{ZR}(S \cdot A \cdot T^{-1}) = \mathrm{ZR}(B) = \mathrm{SR}(B) = \mathrm{SR}(S \cdot A \cdot T^{-1}) \overset{\text{Beh.1}}{=} \mathrm{SR}(A)$$

■

Korollar 3.38. *Zwei Matrizen $A, \widetilde{A} \in M(m \times n, \mathbb{K})$ sind genau dann äquivalent, wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\widetilde{A})$ gilt. Bis auf Äquivalenz werden die $(m \times n)$-Matrizen also eindeutig durch ihren Rang charakterisiert.* ■

3.3 Determinanten

Die Determinante ist ein Abbildung, die einer quadratischen Matrix A mit Einträgen aus dem Körper $\mathbb{K}$ ein Skalar $\det A \in \mathbb{K}$ zuordnet. Bevor wir Determinanten einführen, soll schon mal auf einige wichtige Eigenschaften dieser Abbildungen hingewiesen werden.

- Die Determinante ist durch drei Eigenschaften bestimmt (siehe die nächste Definition für diesen axiomatischen Zugang).

- Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so beschreibt der Betrag $|\det A|$ die Veränderung des Volumens unter der linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$ gilt.
- Mit Hilfe von Determinanten lässt sich die Lösungsmenge von Gleichungssystemen beschreiben.
- Determinanten sind wichtig für die Eigenwert-Bestimmung.

Definition 3.39. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Eine Abbildung*

$$\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad A \mapsto \det A$$

heisst **Determinante**, *wenn* det *die folgenden drei Eigenschaften hat:*

1. det *ist linear in jeder Zeile.*
2. det *ist alternierend, d.h.* $\det A = 0$*, falls A zwei gleiche Zeilen hat.*
3. det *ist normiert, d.h.* $\det E_n = 1$.

Wir werden später sehen, dass solch eine Abbildung existiert und durch die drei Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

Notation: Statt $\det A$ schreiben wir auch $|A|$, z.B.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Beispiele 3.40 (Erste Berechnungen der Determinante)**.**

- $n = 1 : \det(a_{11}) = a_{11} \cdot \det(1) = a_{11} \cdot \det E_1 = a_{11}$
- $n = 2 : \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$= a_{11} \cdot (a_{21} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) + a_{12} \cdot (a_{21} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \det E_2 + a_{12} \cdot a_{21} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Proposition 3.41. *Für die Determinante* $\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *gilt:*

1. $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$.
2. $\det A = 0$*, falls eine Zeile von A verschwindet.*
3. *Entsteht B aus A durch Vertauschen von 2 Zeilen, so ist* $\det B = -\det A$.
4. *Entsteht B aus A durch Addition des λ-fachen der $i$ten Zeile zur $j$ten Zeile ($i \neq j$), so ist* $\det B = \det A$.

Beweis: Ad 1: Sei A eine Matrix mit den Zeilen $a_1, \dots, a_n$. Dann hat $\lambda \cdot A$ die Zeilen $\lambda \cdot a_1, \dots, \lambda \cdot a_n$. Da det linear in jeder Zeile ist, folgt

$$\det(\lambda \cdot A) = \det \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix} = \dots = \lambda^n \cdot \det A \quad \checkmark$$

Ad 2: Verschindet die $i$te Zeile von A, so ist

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ 0 \cdot a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

Ad 3: Sei A eine Matrix mit den Zeilen $a_1, \dots, a_n$ und sei B die Matrix, die aus A entsteht durch Vertauschen der Zeilen a_i und a_j für $i < j$. Dann ist

$$0 = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det A + \det B + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det A + \det B,$$

da die Determinante linear in jeder Zeile ist und alternierend ist. Also gilt $\det A = -\det B$. ✓

Ad 4: Es ist $\det B = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j + \lambda \cdot a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det A$, da die Determinante linear in der $j$ten Zeile ist und alternierend ist. ∎

Übungsaufgabe 3.42. *1. Ist A eine obere Dreiecksmatrix,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

so ist $\det A = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

2. Hat die Matrix die Blockgestalt $A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, so gilt

$$\det A = \det A_1 \cdot \det A_2.$$

Beispiel 3.43. *Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dann ist*

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

Proposition 3.44. *A ist genau dann invertierbar, wenn* $\det A \neq 0$ *gilt.*

Beweis: Wir bringen A mit Hilfe von elementaren Zeilenoperationen vom Typ (I) und (II) in die Zeilenstufenform B,

$$A \rightsquigarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Da bei elementaren Zeilenoperationen vom Typ (I) und (II) die Determinante höchstens das Vorzeichen wechselt, ist

$$\det A \neq 0 \iff \det B \neq 0.$$

Nach der letzten Übungsaufgabe ist $\det B = b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{nn}$. Da sich der Rang unter elementaren Zeilenoperationen nicht verändert, erhalten wir

$$\begin{aligned} A \text{ invertierbar } &\iff \operatorname{rg}(A) = n \iff \operatorname{rg}(B) = n \\ &\iff b_{ii} \neq 0 \quad \forall\, i \iff \det B \neq 0 \iff \det A \neq 0 \end{aligned}$$

■

Proposition 3.45. *Die Determinante ist eindeutig durch die drei Axiome bestimmt, d.h. sind*

$$\det, \widetilde{\det} : M(n \times n, K) \to \mathbb{K}$$

Abbildungen, die beide linear in jeder Zeile, alternierend und normiert sind, so gilt $\det A = \widetilde{\det} A$ *für alle* $A \in M(n \times n, K)$.

Beweis: Sei $A \in M(n \times n, K)$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}$ das Resultat in Zeilenstufenform nach endlich vielen elementaren Zeilenoperationen. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, mit $\det A = \lambda \cdot \det B$ und $\widetilde{\det} A = \lambda \cdot \widetilde{\det} B$, da $\det$ und $\widetilde{\det}$ jeweils die drei Axiome erfüllen. Aus dem gleichen Grund ist auch $\det B = b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{nn} = \widetilde{\det} B$ und somit $\det A = \widetilde{\det} A$. ■

Do 18.01.2007

Proposition 3.46 (Multiplikationstheorem)**.** *Für* $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ *gilt*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Beweis: Ist B nicht invertierbar, so ist $\operatorname{rg}(B) < n$ und somit auch $\operatorname{rg}(A \cdot B) < n$. In diesem Fall verschwindet nach Proposition 3.44 die Determinante von B und von $A \cdot B$. Also gilt $\det(A \cdot B) = 0 = \det B = \det A \cdot \det B$.

Sei nun B invertierbar, also $\det B \neq 0$ nach Proposition 3.44. Definiere

$$F : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad A \mapsto \frac{\det(A \cdot B)}{\det B}$$

Dann erfüllt F die drei Axiome einer Determinante:

F normiert: $F(E_n) = \det(E_n \cdot B)/\det B = \det B/\det B = 1.$ ✓

F alternierend: Sei A ein Matriz mit Zeilen $a_1, \ldots, a_n$ und seien die $i$te und $j$te Zeile von A gleich ($i \neq j$). Wir wollen $F(A) = 0$ zeigen. Man rechnet direkt nach, dass auch die $i$te und $j$te Zeile von $A \cdot B$ gleich sind. Also gilt $\det(A \cdot B) = 0$ und somit $F(A) = 0$. ✓

F linear in jeder Zeile: Direkte Rechnung.

Nach Proposition 3.45 ist also $F(A) = \det A$, d.h. $\det(A \cdot B)/\det B = \det A$, für alle $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Hieraus folgt sofort die Behauptung. ■

Alternativ lässt dich das Multiplikationstheorem für die Determinante mit Hilfe von Elementarmatrizen beweisen. Wir geben hier nur eine Beweisidee. Sei

$$S_i(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

die Diagonalmatrix, die in der $i$ten Zeile als Eintrag in der Diagonalen λ hat und sonst nur Einsen als Eintrag in der Diagonalen hat. Multiplizieren wir $S_i(\lambda)$ von links an eine Matrix A (d.h. $S_i(\lambda) \cdot A$), so wird die $i$te Zeile von A mit λ multipliziert, alle anderen Zeilen von A bleiben unverändert.

Sei $Q_i^j(\lambda)$, $i \neq j$, die Matrix, welche in der Diagonalen nur Einsen hat, in der $i$ten Zeile und $j$ten Spalte λ als Eintrag hat und sonst nur 0 als Eintrag hat. Multiplizieren wir A von links mit $Q_i^j(\lambda)$, so wird zu der $i$ten Zeile von A das λ-fache der $j$ten Zeile von A addiert, alle anderen Zeilen von A bleiben unverändert.

Schliesslich sei $P_i^j = (p_{ij})$ die Matrix mit $p_{kk} = 1$ für $k \neq i, j$, $p_{ii} = p_{jj} = 0$, $p_{ij} = p_{ji} = 1$ und $p_{st} = 0$ sonst. Multiplizieren wir A von links mit P_i^j, so werden die $i$te und $j$te Zeile von A vertauscht.

Die Matrizen $S_i(\lambda)$, $Q_i^j(\lambda)$ und P_i^j heissen **Elementarmatrizen**. Multiplikation von links mit P_i^j, $Q_i^j(\lambda)$ bzw. $S_i(\lambda)$, $\lambda \neq 0$, beschreibt gerade die elementaren Zeilenoperationen durch Matrixmultiplikation. Da $S_i(\lambda)^{-1} = S_i(\lambda^{-1})$, $(Q_i^j(\lambda))^{-1} = Q_i^j(-\lambda)$ und $(P_i^j)^{-1} = P_i^j$ gilt, ist das Inverse einer Elementarmatrix wieder eine Elementarmatrix.

Sei nun B eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix. Dann gibt es nach dem Gauss-Algorithmus Elementarmatrizen, so dass nach Multiplikation von links mit diesen Elementarmatrizen B in eine Matrix überführt wird, die obere Dreiecksgestalt hat mit nicht-verschwindenden Einträgen in der Diagonalen. Da die Diagonalelemente alle $\neq 0$ sind, kann durch Multiplikation von links mit weiteren geeignet gewählten Elementarmatrizen diese Matrix in die Einheitsmatrix E_n überführt werden. Die Matrix B ist also Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen C_i, $B = C_1 \cdot \ldots \cdot C_s$.

Es ist leicht zu zeigen, dass für eine Elementarmatrix C gilt (Übungsaufgabe)

$$\det(A \cdot C) = \det A \cdot \det C$$

Also folgt

$$\det(A \cdot B) = \det(A \cdot C_1 \cdot \ldots \cdot C_s) = \det A \cdot \det C_1 \cdot \ldots \cdot \det C_s$$

$$= \det A \cdot \det(C_1 \cdot \ldots \cdot C_s) = \det A \cdot \det B \quad \checkmark$$

Mit Hilfe des Multiplikationstheorems können wir nun die Determinante eines Endomorphismus definieren. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Für eine Basis $\mathcal{A}$ von V sei

$$\det f := \det M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$$

Korollar 3.47. $\det f$ *ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Basis* $\mathcal{A}$.

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ eine weitere Basis. Dann ist

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = S \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) \cdot S^{-1}$$

für eine invertierbare Matrix $S \in Gl_n(\mathbb{K})$. Mit Hilfe des Multiplikationstheorems folgt

$$\begin{aligned} \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) &= \det(S) \cdot \det M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) \cdot \det S^{-1} \\ &= \det M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) \cdot \det(S \cdot S^{-1}) = \det M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) \end{aligned}$$

■