Einführung in die Konvexgeometrie

Ivan Izmestiev

FU Berlin, WS 03/04

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Basisbegriffe

Bezeichnungen:
Der Euklidische Raum:

$$\mathbb{R}^n := \{(x^1, x^2, \ldots, x^n) |\ x^i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i\}$$

(Die unteren Indexe benutzen wir normalerweise, um die einzelnen Punkte zu nummerieren.)
Die Strecke zwischen x und y:

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y |\ \lambda \in [0, 1]\}$$

Das Skalarprodukt:

$$\langle x, y\rangle := x^1 y^1 + \cdots + x^n y^n.$$

Die Norm des Vektors x (die Länge der Strecke $[0, x]$):

$$|x| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Der Abstand zwischen x und y (die Länge der Strecke $[x, y]$):

$$\operatorname{dist}(x, y) := \langle x - y, x - y\rangle$$

1.1.1 Definition der konvexen Menge

Definition 1.1.1 *Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls sie mit je zwei Punkten auch ihre Verbindungsstrecke enthält:*

$$x, y \in A \Rightarrow [x, y] \subset A.$$

Beispiele

1) Jeder affiner Teilraum, z.B. eine Ebene in $\mathbb{R}^3$. Beweis: ein affiner Teilraum enthält mit je zwei Punkten x, y auch die ganze Gerade durch x und y. Somit enthält er auch die Strecke $[x, y]$.

2) Eine Kugel. Beweis: Sei $K = \{x \in \mathbb{R}^3 |\ |x| \leq 1\}$. Falls $|x| \leq 1$ und $|y| \leq 1$, dann gilt $|\lambda x + (1-\lambda)y| \leq |\lambda x| + |(1-\lambda)y| \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$.

3) Gegenbeispiel: eine Tasse. Aus einer konvexen Menge ist es offenbar unmöglich, Kaffee zu trinken.

Satz 1.1.1 *Der Durchschnitt zweier konvexen Mengen ist konvex.*

Beweis Seien A und B konvex, und seien $x, y \in A \cap B$ beliebig. Dann gilt $x, y \in A$ und folglich $[x, y] \subset A$. Analog $[x, y] \subset B$. Folglich $[x, y] \subset A \cap B$. $\square$

Bemerkung Genauso kann man beweisen, dass der Durchschnitt einer beliebigen (eventuell auch unendlichen) Kollektion konvexer Mengen wiederum konvex ist.

1.1.2 Konvexe Hülle

Erinnerung: für Vektoren (Punkte) $x_1, \ldots x_m$ heißt der Ausdruck $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ lineare Kombination.

Definition 1.1.2 *Seien $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Eine konvexe Kombination von Punkten $x_1, \ldots, x_m$ ist ein Ausdruck von der Form*

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m,$$

wobei

$$\lambda_i \geq 0 \textit{ für alle } i \textit{ und } \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1.$$

Beispiel: $\lambda x + (1-\lambda)y$ mit $\lambda \in [0,1]$ ist eine konvexe Kombination von x und y.

Definition 1.1.3 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Die konvexe Hülle* $\mathrm{conv}(A)$ *von A ist die Menge aller Punkte, die sich als konvexe Kombinationen von Punkten aus A schreiben lassen:*

$$\mathrm{conv}(A) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m \mid x_1, \ldots, x_m \in A,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ m \in \mathbb{N}\}$$

Satz 1.1.2 *Die konvexe Hülle der Menge A ist die kleinste konvexe Menge, die A enthält.*

Erklärung: "M ist die kleinste Menge mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$" heißt "M hat die Eigenschaft $\mathcal{E}$ und jede andere Menge, die diese Eigenschaft hat, enthält M".

Beweis Wir müssen also drei Sachen beweisen:

1) $\mathrm{conv}(A)$ ist konvex;

2) $\mathrm{conv}(A) \supset A$;

3) falls $B \supset A$ und B konvex, gilt $B \supset \mathrm{conv}(A)$.

Zum ersten: Seien $x, y \in \mathrm{conv}(A)$. Dann lassen sie sich wie folgt schreiben:

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$$
$$y = \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_p y_p,$$

wobei $x_i, y_j \in A$, $\lambda_i, \mu_j \geq 0$, $\sum \lambda_i = \sum \mu_j = 1$. Nun läßt sich jeder Punkt $z \in [x,y]$ als $z = \nu x + (1-\nu)y$ mit $0 \leq \nu \geq 1$ schreiben. Somit

$$\begin{aligned} z &= \nu(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m) + (1-\nu)(\mu_1 y_1 + \cdots + \mu_p y_p) \\ &= \nu\lambda_1 x_1 + \cdots \nu\lambda_m x_m + (1-\nu)\mu_1 y_1 + \cdots + (1-\nu)\mu_p y_p \end{aligned}$$

ist eine konvexe Kombination von Punkten aus A, da $\nu\lambda_i \geq 0$, $(1-\nu)\mu_j \geq 0$ und $\sum \nu\lambda_i + \sum(1-\nu)\mu_j = \nu + (1-\nu) = 1$ gilt.

Zum zweiten: Offenbar, da für jeden $x \in A$ gilt $x = 1 \cdot x$ — die einfachste konvexe Kombination auf dieser Welt.

Zum dritten: Wir müssen zeigen, dass falls A in einer konvexen Menge B enthalten ist, so liegt in B auch jede konvexe Kombination von Punkten aus

A. Nun jede konvexe Kombination aus einem Punkt $1 \cdot x$ mit $x \in A$ ist in B enthalten. Jede Kombination zweier Punkte $\lambda x + (1-\lambda)y$ mit $x, y \in A$ — auch, da $x, y \in B$ und B konvex. Ferner,

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)\frac{1}{1-\lambda_1}(\lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m),$$

(falls $\lambda_1 = 0$ gilt, dann haben wir wieder eine triviale konvexe Kombination), und $\frac{1}{1-\lambda_1}(\lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m)$ ist eine konvexe Kombination von $m-1$ Punkte. Mit Induktion folgt dann die Behauptung. $\square$

Korollar 1.1.1 *Die konvexe Hülle von A ist der Durchschnitt aller konvexen Mengen, die A enthalten.*

Korollar 1.1.2 *Für eine konvexe Menge A liegt jede konvexe Kombination ihrer Punkten in A. Anders ausgedrückt, für A konvex gilt* $\operatorname{conv}(A) = A$.

Definition 1.1.4 *Die konvexe Hülle von einer endlichen Punktenmenge heißt konvexes Polytop.*

Beispiel: Nehmen wir $n+1$ Punkte $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 1)$ und $(0, 0, \ldots, 0)$ in $\mathbb{R}^n$. Deren konvexe Hülle ist ein Simplex. Es ist einfach zu beweisen, dass diese Menge aus aller Punkten mit Koordinaten $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, so dass $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i \leq 1$, besteht. Mit anderen Worten, dieser Simplex kann auch als die Lösungsmenge einer linearen Ungleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x^i & \geq & 0 & i = 1, \ldots, n \\ \sum x^i & \leq & 1 & \end{array} \right.$$

beschrieben werden.

1.1.3 Dimension einer konvexen Menge

Nehmen wir einen Kreis oder ein Dreieck in $\mathbb{R}^3$. Die sind zwar konvexe Mengen, aber man hat das Gefühl, dass es "zu viel Raum" um sie herum gibt. Man möchte gerne diese Mengen als Teilmengen von einer Ebene betrachten. Das tut man mit Hilfe der folgenden Begriffe.

Definition 1.1.5 *Seien $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Eine affine Kombination von $x_1, \ldots, x_m$ ist ein Ausdruck der Form $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$, wobei $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$.*

Definition 1.1.6 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Die affine Hülle* $\mathrm{aff}(A)$ *von A ist die Menge aller Punkte, die sich als affine Kombinationen von Punkten aus A schreiben lassen:*

$$\mathrm{aff}(A) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m |\, x_1, \ldots, x_m \in A,\, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\, m \in \mathbb{N}\}$$

Sie haben wohl bemerkt, dass wir lediglich die Bedingung $\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, m$ aus der Definitionen 1.1.2 und 1.1.3 entfernt haben. Somit gilt $\mathrm{aff}(A) \supset \mathrm{conv}(A)$.

Proposition 1.1.1 *Affine Hülle ist ein affiner Teilraum.*

Bemerkung Man beweist analog zum Satz 1.1.2, dass $\mathrm{aff} A$ der kleinste affiner Teilraum ist, der A enthält. Außerdem, kann dieser affiner Teilraum so beschrieben werden: Wähle einen Punkt $x \in A$. Sei V der von Differenzen $x - y$, $y \in A$ aufgespannte Untervektorraum. Dann gilt $\mathrm{aff}(A) = x + V$.

Man definiert die Dimension eines affinen Teilraums als Dimension des entsprechenden linearen Teilraums.

Definition 1.1.7 *Als Dimension einer konvexen Menge bezeichnen wir die Dimension ihrer affinen Hülle.*

Wir benutzen die Bezeichnung $\mathrm{int}(A)$ für das *relative* Innere einer konvexen Menge A.

$* * *$

Proposition 1.1.2 *Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

1) L ist ein affiner Teilraum, d.h. $L = a + V$ für ein $a \in \mathbb{R}^n$ und einen linearen Teilraum V von $\mathbb{R}^n$;

2) mit je zwei Punkten x, y enthält L auch die ganze Gerade durch x und y;

3) jede affine Kombination von Punkten aus L liegt ebenfalls in L.

Beweis 1) $\Rightarrow$ 2): Seien $x, y \in L$. Das heißt, es gibt $x', y' \in V$, so dass $x = a + x'$, $y = a + y'$ gilt. Dann gilt für jedes λ:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = a + \lambda x' + (1 - \lambda)y'.$$

Da $\lambda x' + (1-\lambda)y' \in V$ für jedes λ, liegt somit jeder Punkt der Geraden durch x und y in L.
2) $\Rightarrow$ 3) beweist man analog zum Punkt 3) vom Satz 1.1.2: jede affine Kombination läßt sich iterativ durch affine Kombinationen von nur zwei Punkten auszudrücken.
3) $\Rightarrow$ 1): Sei a ein Element von L. Es reicht zu zeigen, dass die Menge $V := -a + L$ ein linearer Teilraum ist. Nehmen wir zwei Elemente aus V. Sie können als $x - a$ und $y - a$ mit $x, y \in L$ geschrieben werden. Nun liegt die Summe $(x - a) + (y - a) = (x + y - a) - a$ in V, da $x + y - a$ eine affine Kombination von Punkten aus L ist und in L liegt. Analog, für jeden Skalar λ gilt $\lambda(x - a) = (\lambda x + (1 - \lambda)a) - a \in V$. Somit ist V ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. $\square$

Aufgaben

1) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$ gilt. Zeigen Sie: f ist konvex genau dann, wenn die Menge

$$O_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y \geq f(x)\}$$

konvex ist.

2) Zeigen Sie: die Projektion einer konvexen Menge auf einen affinen Teilraum ist ebenfalls konvex.

3) Sei $p \geq 1$. Definiere $\|x\|_p = ((x^1)^p + \cdots + (x^n)^p)^{\frac{1}{p}}$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{x|\ \|x\|_p \leq 1\}$$

konvex ist.

4) Darstellung als konvexe Kombination ist im Allgemeinen nicht eindeutig: Geben Sie Beispiel einer Menge A und eines Punktes x, so dass x sich auf mehr als eine Weise als konvexe Kombination von Punkten aus A schreiben lässt.

5) Sei A die Menge aller Gitterpunkten in $\mathbb{R}^2$, die oberhalb oder auf der Gerade $y = \sqrt{2}x$ liegen:

$$A = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 |\ n \geq \sqrt{2}m\}.$$

Bestimmen Sie $\operatorname{conv}(A)$.

6) Sei A eine konvexe Menge von Dimension n in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass A einen inneren Punkt hat. Allgemein: das relative Innere $\operatorname{int}(A)$ ist nichtleer für jede konvexe Menge A.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst: A enthält $n+1$ affin unabhängigen Punkte.

1.2 Rund um den Satz von Helly

1.2.1 Affine Abhängigkeit und Lemma von Radon

Definition 1.2.1 *Punkte $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ heißen affin abhängig, falls es eine nichttriviale Linearkombination*

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0 \textit{ mit } \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 0$$

existiert.

Proposition 1.2.1 *Punkte $x_1, \ldots, x_m$ sind genau dann affin abhängig, wenn einer von ihnen sich als affine Kombination von anderen schreiben lässt.*

Beweis In einer Richtung: Sei oBdA $x_1 = \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$, $\lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$. Dann gilt $x_1 - \lambda_2 x_2 - \cdots - \lambda_m x_m = 0$, wobei $1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_m = 0$.

In der anderen Richtung: Sei $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 0$. OBdA $\lambda_1 \neq 0$. Folglich $x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 - \cdots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1} x_m$ und $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \cdots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1} = 1$. $\square$

Proposition 1.2.2 *Eine Menge von $m > n+1$ Punkten in $\mathbb{R}^n$ ist affin abhängig.*

Beweis Seien $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)$, $i = 1, \ldots, m$. Die Suche nach einer affinen Abhängigkeit führt zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1^1 + \cdots + \lambda_m x_m^1 &= 0 \\ &\cdots \\ \lambda_1 x_1^n + \cdots + \lambda_m x_m^n &= 0 \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

Das sind $n+1$ homogenen linearen Gleichungen mit m Unbekannten λ_i. Da $m > n+1$, hat das System eine nichttriviale Lösung. $\square$

Satz 1.2.1 (Lemma von Radon) *Jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ aus mehr als $n+1$ Punkten kann man in zwei Teilmengen A_1 und A_2 zerlegen, so dass* $\operatorname{conv}(A_1) \cap \operatorname{conv}(A_2) \neq \emptyset$ *ist.*

Betrachten Sie vierpunktige Mengen in $\mathbb{R}^2$. Welche Zerlegungen muß man nehmen, je nach der Position der Punkten?

Beweis Erstens, man darf annehmen, dass A eine endliche Menge aus $m > n+1$ Punkten ist. (Falls A unendlich, kann man eine endliche Teilmenge davon auswählen, sie nach dem Lemma zerlegen und den Rest beliebig zwischen den zwei erhaltenen Teilmengen verteilen.)

Sei $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Nach der Proposition 1.2.2 gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0$ und $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 0$, wobei nicht alle λ_i sind 0. Wir können jetzt die Punkte x_i so umnummerieren, dass erste k von Koeffizienten λ_i positiv sind, und alle übrigen nichtpositiv. Bringen wir alle Glieder mit nichtpositiven Koeffizienten auf die rechte Seite der Gleichung:

$$\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_k x_k = -\lambda_{k+1} x_{k+1} - \cdots - \lambda_m x_m$$

Dabei $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = -\lambda_{k+1} - \cdots - \lambda_m =: c$. Wird die obere Gleichung durch c geteilt, erhalten wir auf beiden Seiten konvexe Kombinationen die dengleichen Punkt darstellen. Somit können wir $A_1 = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $A_2 = \{x_{k+1}, \ldots, x_m\}$ setzen. $\square$

1.2.2 Satz von Helly

Mit Hilfe des Lemmas von Radon können wir nun den Satz von Helly beweisen.

Satz 1.2.2 *Seien $A_1, \ldots, A_m$ konvexe Mengen in $\mathbb{R}^n$. Wenn je $n+1$ von dieser Mengen einen nichtleeren Durchschnitt haben, dann ist der Durchschnitt aller A_i nichtleer.*

Beweis Induktion nach m. Basis der Induktion: für $m = n+1$ gilt die Behauptung. (Übrigens ist sie auch für $m \leq n$ vollkommen richtig, aber auch vollkommen nutzlos.) Nun gelte sie für jede Familie von m konvexen Mengen für ein bestimmtes $m \geq n+1$. Betrachten wir eine beliebige Familie von $m+1$ konvexen Mengen $A_1, \ldots, A_{m+1}$. Setze

$$B_i = A_1 \cap \cdots \cap \widehat{A_i} \cap \cdots \cap A_{m+1}$$

für $i = 1, \ldots, m+1$ (B_i ist der Durchschnitt aller Mengen der Familie bis auf A_i.) Nach der Induktionsannahme ist jede B_i nichtleer. Sei $x_i \in B_i$, $i =$

$1, \ldots, m+1$. Da $m+1 > n+1$, ist das Lemma von Radon auf die Menge $\{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ anwendbar, und oBdA erhalten wir einen Punkt

$$x \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_k\} \cap \operatorname{conv}\{x_{k+1}, \ldots, x_{m+1}\}$$

für ein bestimmtes k. Zeigen wir nun, dass x zu allen A_i gehört. In der Tat: falls $i \leq k$, gilt $B_j \subset A_i$ für alle $j > k$ und somit $x_j \in A_i$ und $x \in \operatorname{conv}\{x_{k+1}, \ldots, x_{m+1}\} \subset A_i$. Analog für $i > k$. Somit der Durchschnitt aller A_i nichtleer und der Induktionsschritt bewiesen. $\square$

Bemerkungen Alle Bedingunen in der Formulierung sind notwendig:
1) Es ist einfach, 4 nichtkonvexe Mengen in der Ebene zu finden, so dass je 3 von ihnen ein nichtleeres Durchschnitt haben, alle 4 aber nicht.
2) Wenn man "je $n+1$" durch "je n" ersetzt, gilt der Satz nicht mehr: betrachte eine Familie von Hyperebenen in der allgemeinen Lage.
3) Für eine unendliche Familie $\{A_i\}$ gibt es auch ein Gegenbeispiel: betrachte Halbräume $A_i = \{x \in \mathbb{R}^n | \; x^1 > i\}$. Jede endliche Teilfamilie (insbesondere je $n+1$) von A_i hat einen nichtleeren Durchschnitt, der Durchschnitt von allen ist hingegen leer. **Aber,** wenn man zusätzlich voraussetzt, dass die Mengen der Familie kompakt sind (d. h. beschränkt und abgeschlossen), dann gilt der Satz von Helly auch für unendlich viele A_i.

1.2.3 Anwendungen

Proposition 1.2.3 (Centerpoint) *Für jede beschränkte messbare Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es einen Punkt $c \in \mathbb{R}^n$, so dass jede Hyperebene durch c nicht weniger als $\frac{1}{n+1}$ vom Volumen von M abschneidet. Mit anderen Worten, für jeden Halbraum $H \subset \mathbb{R}^n$, in dessen Randebene c liegt, gilt* $\operatorname{vol}(M \cap H) \geq \frac{1}{n+1}\operatorname{vol}(M)$.

Beweis Bezeichnen wir einen Halbraum H von $\mathbb{R}^n$ als "groß", falls $\operatorname{vol}(M \setminus H) < \frac{1}{n+1}\operatorname{vol}(M)$ ist. Zeigen wir, dass der Durchschnitt von $n+1$ großen Halbräumen stets nichtleer ist. Seien $H_1, \ldots, H_{n+1}$ alle groß. Angenommen, ihr Durchschnitt ist leer, haben wir $\bigcup_{i=1}^{n+1}(M \setminus H_i) = M$ (die Komplemente zu H_i überdecken $\mathbb{R}^n$ und insbesondere M). Das ist aber nicht möglich, da $\sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{vol}(M \setminus H_i) < \operatorname{vol}(M)$ ist.

Jetzt möchten wir daraus schließen, dass alle große Halbräume einen gemeinsamen Punkt haben. Das folgt leider nicht direkt aus dem Satz von Helly, da weder ist ein großer Halbraum kompakt, noch ist deren Anzahl endlich.

Wir machen einen Trick. Sei K eine Kugel, so dass $M \subset K$ (hier benutzen wir die Beschränktheit von M). Betrachten wir anstatt großen Halbräumen deren Durchschnitte mit K. Dann ist der Durchschnitt von je $n+1$ solchen "großen" Kugelsegmenten nichtleer — dasselbe Argument wie oben. Jeder Segment ist aber kompakt. Somit ist der Durchschnitt aller großen Segmenten (und auch allen großen Halbräumen) nichtleer.

Sei jetzt $c \in \bigcap_{H \text{ groß}} H$. Wir behaupten, dass c der gesuchte Centerpoint ist. Sei L eine beliebige Hyperebene durch c. Dann kann keiner von zugehörigen Halbräumen L_+ und L_- groß sein: Falls z. B. L_+ groß ist, kann man L ein wenig verschieben, so dass L_+ den Punkt c nicht mehr enthalten wird, aber groß bleibt — Widerspruch zur Auswahl von c. $\square$

Bemerkung Den Satz kann man auch für eine allgemeinere Maß formulieren. Z. B. für die Zählmaß $Z(A) := |A \cap M|$, wobei M eine endliche Menge ist, und das Maß von A ist also die Anzahl der Punkte von M, die in A liegen. Dann lautet der Satz über den Centerpoint wie folgt: Für jede endliche Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es einen Punkt $c \in \mathbb{R}^n$, so dass jeder Halbraum, auf dessen Rand c liegt, mindestens $\frac{1}{n+1}$ Anteil von Punkten aus M enthält.

Als nächste Anwendung betrachten wir das folgende Approximationsproblem. Sei T eine endliche Menge und seien n Funktionen $f_i : T \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ gegeben. Lege eine Funktion $g : T \to \mathbb{R}$ und eine positive Zahl ε fest. Gesucht wird eine lineare Kombination $f_x = x^1 f_1 + \cdots + x^n f^n$, die die Funktion g gleichmäßig auf T approximiert. Die folgende Proposition besagt, dass es eine gibt, falls g auf allen einigermaßen "kleinen" Teilmengen von T gleichmäßig approximiert werden kann.

Proposition 1.2.4 *Nehmen wir an, für je $n+1$ Punkte $t_i \in T$, $i = 1, \ldots, n+1$ gibt es eine Funktion $f_x = x^1 f_1 + \cdots + x^n f_n$, so dass*

$$|f_x(t_i) - g(t_i)| < \varepsilon \text{ für alle } i. \tag{1.1}$$

Dann gibt es eine f_x mit der Eigenschaft

$$|f_x(t) - g(t)| < \varepsilon \text{ für alle } t \in T. \tag{1.2}$$

Beweis Für jedes $t \in T$ setze $A_t := \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n | \, |f_x(t) - g(t)| < \varepsilon\}$. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass A_t konvex ist. Außerdem, für $S \subset T$ gilt $x \in \bigcap_{t \in S} A_t$ genau dann, wenn $|f_x(t) - g(t)| < \varepsilon$ für alle $t \in S$ gilt. Dann besagt die Behauptung (1.1), dass der Durchschnitt je $n+1$ von Mengen A_t nichtleer ist. Nach dem Satz von Helly folgt daraus die Behauptung (1.2). $\square$

Mengen A_t im obigen Beweis sind nicht kompakt (sogar nicht beschränkt). Deswegen kann man nicht ohne weiteres behaupten, dass aus denselben Voraussetzungen auch Existenz einer gleichmäßigen Approximation auf einer unendlichen Menge T gibt. Nichtsdestotrotz gilt es für genügend gute approximierende Funktionen f_i. Die folgende Proposition geben wir ohne Beweis.

Proposition 1.2.5 *Für polynomialen Approximationen (also $f_i(t) = t^{i-1}$ oben) gilt die obige Proposition auch für unendlichen Mengen T.*

Für Beweis siehe [Barvinok, Section I.6].

1.2.4 Satz von Carathéodory

Nach der Definition von der konvexen Hülle ist jeder Punkt von $\operatorname{conv}(A)$ als konvexe Kombination $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ von Punkten $x_i \in A$ darstellbar. Wie lang müssen die Kombinationen sein, um alle Punkte von $\operatorname{conv}(A)$ umzufassen? Die Antwort wird durch den folgenden Satz gegeben.

Satz 1.2.3 (Satz von Carathéodory) *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann lässt sich jeder Punkt $y \in \operatorname{conv}(A)$ als konvexe Kombination von (nicht mehr als) $n+1$ Punkten aus A schreiben.*

Beweis Schreiben wir $y = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ mit m beliebig und versuchen die Zahl m mittels Lemmas von Radon zu vermindern, falls $m > n+1$ ist. Nach diesem Lemma existieren es $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ nicht alle 0 mit $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 0$ und $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = 0$. Somit für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$y = (\lambda_1 - t\alpha_1)x_1 + \cdots + (\lambda_m - t\alpha_m)x_m$$

Setzen wir zuerst $t = 0$ und lassen es dann steigen, bis ein der Koeffizienten verschwindet. Das ergibt eine konvexe Kombination von weniger Punkten. Explizit wählt man die Zahl t wie folgt: Erstens, wir brauchen uns um die Glieder mit $\alpha_i \leq 0$ nicht zu kümmern. Zweitens, es gibt mindestens ein $\alpha_i > 0$, da $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 0$. Wähle nun j so, dass $\alpha_j > 0$ und $\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \geq \frac{\lambda_j}{\alpha_j}$ für alle i mit $\alpha_i > 0$. Setze $t = \frac{\lambda_j}{\alpha_j}$. Dann ist

$$y = \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_j}{\alpha_j}\alpha_1\right) x_1 - \ldots - \left(\lambda_m - \frac{\lambda_j}{\alpha_j}\alpha_m\right) x_m$$

eine konvexe Kombination mit verschwindendem j-ten Summanden. $\square$

Den Satz von Carathéodory kann man auch wie folgt formulieren: Jeder Punkt der konvexen Hülle $\operatorname{conv}(A)$ liegt in einem Simplex mit Ecken in A.

Aufgaben

1) Seien $A_1, \ldots, A_m$ konvexe Mengen in $\mathbb{R}^3$. Nehmen wir an, je 3 von ihnen haben nichtleeres Durchschnitt. Zeigen Sie: Für jede Gerade L gibt es eine zu ihr parallele Gerade L', die alle A_i schneidet.

2) (Ziehen von Sehnen.) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Bilde eine Reihe von Mengen $A_0, A_1, \ldots,$ wobei $A_0 = A$ und A_{i+1} aus A_i durch ziehen von Sehnen erhalten ist. Das heißt, A_{i+1} ist die Vereinigung aller Strecken mit Endpunkten in A_i. Zeigen Sie: $A_k = \operatorname{conv}(A)$ für $k \geq \log_2(n+1)$.

3) (a) Sei der Raum $\mathbb{R}^n$ mit einer endlichen Familie von Halbräumen überdeckt. Dann kann man aus dieser Familie $n+1$ oder weniger Halbräume wählen, so dass sie den Raum ebenfalls überdecken.

   (b) Allgemeiner: Sei eine konvexe Menge A mit einer endlichen Familie von Halbräumen überdeckt. Dann kann man aus dieser Familie $n+1$ oder weniger Halbräume wählen, so dass sie die Menge A ebenfalls überdecken.

4) Sei eine endliche Familie von senkrechten Strecken in $\mathbb{R}^2$ gegeben. Nehmen wir an, für je 3 von ihnen gibt es eine Gerade, die sie schneidet. Dann gibt es eine Gerade, die alle Strecken der Familie schneidet.

5) In einem (3-dimensionalen Wohn-)Raum versuchen 4 Diebe einem Polizisten zu entgehen. Der Raum hat aber eine Eigenschaft, dass wo auch immer die Diebe sich verstecken, kann der Polizist einen Punkt finden, von welchem er alle 4 sehen kann. Zeigen Sie: Der Polizist kann einen Posten finden, von dem der ganze Raum beobachtet werden kann.

Hinweise

1) Benutzen Sie eine Projektion entlang L.
3a) Merken Sie: eine Familie von Mengen überdeckt den Raum genau dann, wenn der Durchschnitt der Komplementen zu diesen Mengen leer ist. Für 3b) muss diese Idee noch weiterentwickelt werden.
4) Eine (nicht senkrechte) Gerade ist der Graphen einer linearen Funktion, und Strecken geben eine Approximationsbedingung an.

1.3 Trennungs- und Stützeigenschaften von konvexen Mengen

1.3.1 Trennende Hyperebenen

Erinnerung Eine stetige Funktion auf einer (nichtleeren) kompakten Menge nimmt ihren minimalen und maximalen Wert an.

Definition 1.3.1 (-Proposition) *Sei A eine abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^n$ und x ein fester Punkt in $\mathbb{R}^n$. Dann nimmt der Abstand* $\operatorname{dist}(x, y)$, $y \in A$ *als Funktion von y seinen minimalen Wert auf A an. Dieses Minimum heißt der Abstand von x zu A und wird mit* $\operatorname{dist}(x, A)$ *bezeichnet.*

Beachten Sie, dass die Menge A nicht kompakt sein muss. Deswegen ist es nicht sofort klar, ob das Minimum erreicht wird. Um zu zeigen, dass es trotzdem der Fall ist, betrachten wir eine Kugel K mit Zentrum x, so dass $K \cap A \neq \emptyset$. Dann ist $K \cap A$ eine nichtleere kompakte Menge, und $\min\{\operatorname{dist}(x, y) |\ y \in K \cap A\}$ wird erreicht. Es ist klar, dass dieses Minimum auch das Minimum von $\operatorname{dist}(x, y)$ über alle $y \in A$ wird.

Satz 1.3.1 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge und $x \notin A$. Dann gibt es eine Hyperebene, die x von A trennt. (D. h. x und A liegen in zwei verschiedenen offenen Halbräumen bezüglich dieser Hyperebene.)*

Beweis Sei $x' \in A$ ein Punkt mit $\operatorname{dist}(x, x') = \operatorname{dist}(x, A)$. (In der Tat ist dieser nächstliegende zu x Punkt in der konvexen Menge A eindeutig bestimmt, aber es ist für uns momentan nicht wichtig.) Sei L die orthogonale zu $[x, x']$ Hyperebene durch den Mittelpunkt von $[x, x']$. Wir behaupten, dass L den

Punkt x von der Menge A trennt. Wenn das Gegenteil gelte, gäbe es einen Punkt $y \in A$ auf derselben Seite von L wie x. Dann ist es eine einfache planimetrische Aufgabe, auf der Strecke $[x', y]$ einen Punkt zu finden, der näher zu x liegt als x'. $\square$

Korollar 1.3.1 *Jede abgeschlossene konvexe Menge ist der Durchschnitt von einer Familie von Halbräumen.*

(Nimm für jeden Punkt $x \notin A$ eine trennende Hyperebene und den zugehörigen Halbraum auf der Seite von A.)

1.3.2 Stützebenen

Ab jetzt betrachten wir nur kompakte konvexe Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Im folgenden wird uns die algebraische Beschreibung von einer Hyperebene als die Lösungsmenge von einer inhomogenen linearen Gleichung nützlich sein. Jede inhomogene lineare Gleichung lässt sich wie folgt schreiben:

$$\langle x, v \rangle = \lambda,$$

wobei $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Das Vektor v ist ein Einheitsnormalenvektor zur Hyperebene. Wenn man v festlegt und λ variiert, bekommt man eine Schar von parallelen Hyperebenen. Jede Hyperebene hat zwei entgegengerichteten Normalen. Dementsprechend bestimmen die Paare (und nur diese) (v, λ) und $(-v, -\lambda)$ dieselbe Hyperebene. Ferner, die Ungleichung

$$\langle x, v \rangle \leq \lambda$$

gibt einen Halbraum $H(v, \lambda)$ an. Dabei kann man einfach sehen, dass v das *äußere* Normalenvektor zum $H(v, \lambda)$ ist. Der $H(v, \lambda)$ ergänzende Halbraum ist $H(-v, -\lambda)$.

Definition 1.3.2 *Eine Hyperebene L heißt eine Stützebene der konvexen Menge A, falls die folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

1) $L \cap A \neq \emptyset$;

2) A liegt ganz in einem der L zugehörigen Halbräumen.

Dieser A enthaltender Halbraum heißt ein Stützhalbraum von A.

Proposition 1.3.1 *Sei A eine kompakte konvexe Menge. Für jeden Einheitsvektor v gibt es genau einen Stützhalbraum von A mit der äußeren Normalen v.*

Beweis Betrachten wir die lineare Funktion f_v auf $\mathbb{R}^n$:

$$f_v(x) = \langle x, v \rangle$$

Es ist einfach zu sehen, dass $H(v, \lambda)$ genau dann ein Stützhalbraum von A ist, wenn λ der maximale Wert von f_v auf A ist. Da A kompakt ist, nimmt f_v das Maximum auf A, und das ergibt den einzigen Stützhalbraum mit der Normalen v. $\Box$

Erinnerung: ein Punkt $x \in A$ heißt ein innerer Punkt von A, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass die Kugel mit Zentrum x und dem Radius ε ganz in A enthalten ist. Falls $x \in A$ kein innerer Punkt ist (also, jede Kugel mit Zentrum x Punkte außerhalb A enthält), heißt x ein Randpunkt von A.

Satz 1.3.2 *Sei A eine kompakte konvexe Menge. Dann geht durch jeden Randpunkt von A eine Stützebene.*

Für den Beweis brauchen wir das folgende

Lemma 1.3.1 *Eine kompakte konvexe Menge A ist der Durchschnitt ihrer Stützhalbräumen.*

Beweis des Lemmas Einerseits enthält dieser Durchschnitt die Menge A. Andererseits, sei $x \notin A$. Dann ist die Hyperebene, die durch den nächsten zu x Punkt x' von A geht und orthogonal zur Strecke $[x, x']$ ist, eine Stützebene von A. Dabei liegt der Punkt x im zugehörigen Stützhalbraum nicht und ist somit im Durchschnitt aller Stützhalbräumen nicht enthalten. $\Box$

Beweis des Satzes Nehmen wir an, x ist ein Randpunkt von A, der in keiner Stützebene liegt. Definieren wir eine Funktion f, die jedem Einheitsvektor v den Abstand von x zur Randebene vom Stützhalbraum mit der Normale v zuordnet. Mit einer Formel: $f(v) = \lambda - \langle x, v \rangle$, wobei $H(v, \lambda)$ ein Stützhalbraum von A ist. Dann ist f eine stetige Funktion auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n | \ |v| = 1\}$ und nimmt dort das Minimum an. Sei ε der minimale Wert von f. Dann liegt die Kugel mit Zentrum x und Radius ε ganz in jedem Stützhalbraum und somit, nach dem Lemma, in A. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass x ein Randpunkt von A ist. $\Box$

Allerdings haben wir es ohne Beweis benutzt, dass die Funktion f stetig ist.

1.3.3 Stützfunktion

Nach den Betrachtungen im vorigen Abschnitt ist die folgende Definition naheliegend.

Definition 1.3.3 *Sei A eine kompakte konvexe Menge. Die Stützfunktion s_A von A ordnet jedem Einheitsvektor v das Niveau λ vom Stützhalbraum $H(v, \lambda)$ von A:*

$$s_A(v) = \max\{\langle x, v\rangle |\ x \in A\}$$

Somit ist $s_A : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$.

Die Funktion s_A kann auch auf den ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden: die Formel in der obigen Definition funktioniert genauso gut für Vektoren v mit dem Betrag anders als 1. Dann, wie man sofort sieht, ist s_A eine positiv homogene Funktion. Das heißt, $s_A(\lambda v) = \lambda s_A(v)$ für jedes $\lambda > 0$.

Hier sind einige Elementareigenschaften der Stützfunktion:

Proposition 1.3.2 *1) Falls $A \subset B$, gilt $s_A(v) \leq s_B(v)$ für alle v.*

2) Stützfunktion ist beschränkt auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1}$.

3) Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $s_A(-v) \geq -s_A(v)$. Falls es für ein $v \neq 0$ die Gleichung gilt, ist $\dim(A) < n$.

Beweis 1) ist klar. 2) folgt aus 1), indem man für B eine A enthaltende Kugel nimmt. Für 3) merke: $\max\langle x, -v\rangle = -\min\langle x, v\rangle$. $\square$

Die Stützfunktion von A bestimmt die Menge A: sie bestimmt nämlich sämtlichen Stützhalbräume von A und die letzten bestimmen A nach dem Lemma 1.3.1. Darüber hinaus, aus jeder Funktion $s : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ ergibt sich eine konvexe Menge nach der Regel $A(s) = \bigcap_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} H(v, s(v))$. Das garantiert aber nicht, dass s die Stützfunktion von der so entstehenden Menge $A(s)$ wird: irgendeiner von Halbräumen $H(v, s(v))$ kann " ins Abseits"geraten. Welche Funktionen Stützfunktionen von konvexen Mengen sind, erklären die folgenden Sätze.

Satz 1.3.3 *Die Stützfunktion einer kompakten konvexen Menge ist konvex.*

(Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt konvex (oder konvex nach unten), falls $f(\lambda v + \mu w) \leq \lambda f(v) + \mu f(w)$ für alle v, $w \in \mathbb{R}^n$ und alle λ, $\mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ gilt.)

Beweis Nach der Definition gilt

$$\langle x, \lambda v + \mu w \rangle = \lambda \langle x, v \rangle + \mu \langle x, w \rangle \leq \lambda s_A(v) + \mu s_A(w)$$

für alle $x \in A$. Somit gilt auch

$$s_A(\lambda v + \mu w) = \max\{\langle x, \lambda v + \mu w \rangle |\, x \in A\} \leq \lambda s_A(v) + \mu s_A(w)$$

□

Bemerkung Eine positiv homogene Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn sie subadditiv ist, d. h. wenn es für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ gilt.

Satz 1.3.4 *Jede positiv homogene konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Stützfunktion einer kompakten konvexen Menge.*

Diesen Satz werden wir erst im Thema "Dualität"beweisen.

Proposition 1.3.3 *Die Stützfunktion ist stetig.*

Beweis Es gilt:

$$s_A(v + w) \leq s_A(v) + s_A(w) = s_A(v) + |w| s_A(\frac{w}{|w|})$$

Da aber s_A auf $\mathbb{S}^{n-1}$ beschränkt ist, folgt $|s_A(\frac{w}{|w|})| < C$ für eine Konstante C. Somit für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $|s_A(v + w) - s_A(v)| < \varepsilon$ für alle w mit $|w| < \frac{\varepsilon}{C}$.
□

Es gilt eine viel allgemeinere Tatsache: jede konvexe Funktion ist stetig.

1.3.4 Minkowski Summe

Für zwei beliebige Teilmengen A und B von $\mathbb{R}^n$ kann man deren Summe bilden:

$$A + B := \{a + b|\, a \in A,\, b \in B\}$$

Falls A und B konvex sind, nennt man diese Operation manchmal Minkowski Summe von konvexen Mengen.

Proposition 1.3.4 *Die Summe zweier konvexer Mengen ist konvex.*

Beweis Seien $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2 \in A + B$ und seien λ, $\mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$. Dann gilt

$$\lambda(a_1 + b_1) + \mu(a_2 + b_2) = (\lambda a_1 + \mu a_2) + (\lambda b_1 + \mu b_2) \in A + B$$

□

Außerdem ist die Summe zweier kompakter Mengen kompakt. Betrachte dafür die Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x + y$. Sie ist stetig und bildet $A \times B$ auf $A + B$ ab. Da $A \times B$ kompakt, und das Bild einer kompakten Menge kompakt ist, ist $A + B$ auch kompakt.

Satz 1.3.5 *Die Stützfunktion der Minkowski Summe zweier kompakten konvexen Mengen ist die Summe ihrer Stützfunktionen.*

Beweis Seien $a_v \in A$, $b_v \in B$ so gewält, dass $s_A(v) = \langle a_v, v\rangle$, $s_B(v) = \langle b_v, v\rangle$ gilt. Dann gilt offenbar

$$s_{A+B}(v) = \max\{\langle x, v\rangle |\; x \in A + B\} = \langle a_v + b_v, v\rangle = s_A(v) + s_B(v)$$

□

Aufgaben

1) (a) Sei A konvex und abgeschloßen. Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ genau einen Punkt x' von A mit $\operatorname{dist}(x, x') = \operatorname{dist}(x, A)$ gibt. Somit ist die Abbildung "der nächste Punkt"$x \mapsto x'$ wohldefiniert.

   (b) Sei A konvex und kompakt. Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $y \in \partial A$ einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ gibt, so dass y der nächste zu x Punkt von A ist.

   (c) Zeigen Sie, dass die Abbildung "der nächste Punkt" kontrahierend ist, d. h. $\operatorname{dist}(x', y') \leq \operatorname{dist}(x, y)$ für alle x, y ist.

2) Sei $A+x$ die Parallelverschiebung von A um den Vektor x. Wie hängen die Stützfunktionen s_{A+x} und s_A zusammen?

3) Der Parallelkörper von A im Abstand d ist die Menge A_d aller Punkte, deren Abstand zu A kleiner oder gleich d ist.

   (a) Zeigen Sie, dass der Parallelkörper konvex ist.

   (b) Wie hängt die Stützfunktion des Parallelkörpers mit der Stützfunktion der ursprünglichen kompakten Menge zusammen?

4) Eine kompakte konvexe Menge A heißt ein Gleichdick, falls $s_A(v) + s_A(-v) = \text{const}$ gilt. Welche geometrische Bedeutung hat es? Gibt es ein Gleichdick, das keine Kugel ist?

5) Seien A und B kompakte konvexe Mengen mit $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie: es gibt eine A und B trennende Hyperebene.

6) Zeigen Sie: Jede konvexe (konkave) Funktion ist stetig.

Hinweise

4) Um ein Gleichdick zu konstruieren, nehmen Sie ein reguläres Dreieck und versuchen es gleichdick zu machen.
5) Betrachten Sie die Minkowski Summe $A - B$.
6) Jeder Punkt von $\mathbb{R}^n$ liegt im Inneren von einem Simplex. Die Werte der Funktion in Knoten dieses Simplexes reichen aus um die Abweichung der Funktion im ganzen Simplex abzuschätzen.

1.4 Struktur des Randes: Seiten und extreme Punkte

Alle konvexe Mengen, die wir hier betrachten, sind abgeschlossen vorausgesetzt.

1.4.1 Seiten

Definition 1.4.1 *Eine Seite der konvexen Menge ist der Durchschnitt der Menge mit einer ihrer Stützebenen.*

Normalerweise zählt man die leere Menge und die ganze Menge A auch zu den Seiten von A. Eine Seite, die nicht leer und nicht gleich dem ganzen A ist, heißt eine echte Seite von A. Man sieht sofort, dass jede Seite eine abgeschlossene konvexe Menge ist. Somit ist deren Dimension definiert. Eine Seite der Dimension k heißt auch eine k-Seite.

Proposition 1.4.1 *Der Durchschnitt von Seiten ist ebenfalls eine Seite.*

Beweis Seien $F_1, \ldots, F_m$ Seiten der konvexen Menge A. Zu zeigen: $\bigcap_{i=1}^m F_i$ ist eine Seite von A. Sei dieser Durchschnitt nichtleer. Sei $H(v_i, \lambda_i)$ ein Stützhalbraum von A, so dass $A \cap L(v_i, \lambda_i) = F_i$ (hier ist $L(v_i, \lambda_i) = \{x | \langle x, v_i \rangle = \lambda_i\}$). Dann gilt $\langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i$ für jedes $x \in A$, und $\langle x, v_i \rangle = \lambda_i$ gilt für ein $x \in A$ genau dann, wenn $x \in F_i$. Folglich $\langle x, \sum_{i=1}^m v_i \rangle \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i$ für alle $x \in A$, und $\langle x, \sum_{i=1}^m v_i \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i$ gilt für ein $x \in A$ genau dann, wenn $x \in \bigcap_{i=1}^m F_i$. Nun, falls $\sum_{i=1}^m v_i = 0$, ersetze ganz am Anfang v_1 durch $2v_1$. Falls $\sum_{i=1}^m v_i \neq 0$, ist $L := L(\sum_{i=1}^m v_i, \sum_{i=1}^m \lambda_i)$ eine Stützebene von A und $A \cap L = \bigcap_{i=1}^m F_i$. $\square$

Proposition 1.4.2 *Die Seite eines Polytops ist ebenfalls ein Polytop.*

Beweis Sei $P = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_m\}$ unser Polytop. Sei $H(v, \lambda)$ ein Stützhalbraum von P, $L(v, \lambda)$ — seine Randebene, und $F = P \cap L(v, \lambda)$ die zugehörige Seite. OBdA $\{x_1, \ldots, x_m\} \cap L(v, \lambda) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ für ein k. Wir werden zeigen: $F = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_k\}$. Einerseits, da F konvex ist und die Punkte $x_1, \ldots, x_k$ enthält, gilt $\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_k\} \subset F$. Andererseits, sei $x \in P \cap L(v, \lambda)$. D. h., $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ und $\langle x, v \rangle = \lambda$. Aber $\langle x_i, v \rangle \leq \lambda$ für alle i und $\langle x_j, v \rangle < \lambda$ für $j > k$. Daraus folgt $\lambda_j = 0$ für alle $j > k$. Somit liegt jedes $x \in P \cap L(v, \lambda)$ in der konvexen Hülle von $x_1, \ldots, x_k$. $\square$

Korollar 1.4.1 *Jedes Polytop hat endlich viele Seiten.*

Beachte: Seite einer Seite muss nicht unbedingt eine Seite sein. Zum Beispiel, sei A die Minkowski Summe von der Kreisscheibe $\{x \in \mathbb{R}^2 | \, |x| \leq 1\}$ und der Strecke $\{(x^1, 0) | \, |x^1| \leq 1\}$. Dann ist $F = \{(x^1, 1) | \, |x^1| \leq 1\}$ eine Seite von A, und $G = \{(1, 1)\}$ ist eine Seite von F. Aber G ist keine Seite von A.

Für Polytope ist die Situation besser. Für sie ist die Relation 'eine Seite zu sein' transitiv, und somit definiert eine Halbordnung auf der Menge aller Seiten eines Polytops.

1.4.2 Extreme Punkte

Definition 1.4.2 *Ein Punkt $a \in A$ heißt ein extremer Punkt von A, falls a sich keineswegs als der Mittelpunkt einer nichtentarteten Strecke mit Endpunkten in A darstellen lässt. D. h., aus $a = \frac{b+c}{2}$, $b, c \in A$ folgt $b = c = a$.*

Es ist klar, dass jeder extreme Punkt ein Randpunkt ist.

Proposition 1.4.3 *Eine* 0*-Seite ist ein extremer Punkt.*

Beweis Sei $\{a\}$ eine 0-Seite von A, und sei $H(v, \lambda)$ ein Stützhalbraum von A, so dass $A \cap L(v, \lambda) = \{a\}$. Dann gilt $\langle x, v \rangle < \lambda$ für alle $x \in A$, $x \neq a$. Angenommen $a = \frac{b+c}{2}$, $b, c \in A$, man hat $\langle a, v \rangle = \frac{\langle b,v \rangle + \langle c,v \rangle}{2}$ und somit $b = c = a$. $\square$

Beachte, dass die Umkehrung dieser Proposition nicht gilt. Betrachte dieselbe konvexe Menge (die Summe einer Kreisscheibe und einer Strecke), wie am Ende des vorigen Abschnitts. Der Punkt $(1, 1)$ ist ein extremer Punkt dieser Menge, bildet aber keine Seite von ihr.

Satz 1.4.1 *Eine kompakte konvexe Menge ist die konvexe Hülle ihrer extremen Punkte.*

Lemma 1.4.1 *Sei F eine Seite von A und $a \in F$ ein extremer Punkt von F. Dann ist a auch ein extremer Punkt von A.*

Beweis Sei L eine Stützebene von A, so dass $A \cap L = F$. Nehmen wir an, $a = \frac{b+c}{2}$, $b, c \in A$. Daraus folgt analog zum obigen Argument $b, c \in L$. Folglich, $b, c \in F$. Da aber a ein extremer Punkt von F ist, gilt $b = c = a$. $\square$
Beweis des Satzes Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine n-dimensionale kompakte konvexe Menge. Wir führen Induktion nach n.

Für $n = 1$ ist A eine Strecke und die Behauptung folgt. Ferner, sei $x \in A$. Falls x ein Randpunkt ist, liegt x auf einer Seite F von A. Diese Seite ist eine kompakte konvexe Menge, deren Dimension kleiner als Dimension von A ist. Nach der Induktionsannahme liegt x in der konvexen Hülle von extremen Punkten von F. Aber jeder extreme Punkt von F ist auch ein extremer Punkt von A nach dem Lemma.

Nun liege x im Inneren von A. Betrachte eine beliebige Gerade l durch x. Der Durchschnitt $A \cap l$ ist eine Strecke $[a, b]$, wobei a und b Randpunkte von A sind. Wie es oben gezeigt ist, liegen a und b in der konvexen Hülle von extremen Punkten von A. Aber x lässt sich als eine konvexe Kombination von a und b schreiben und liegt somit auch in dieser Hülle. □

Die folgende Proposition weist auf die Wichtigkeit der extremen Punkte für lineare Optimierung hin.

Proposition 1.4.4 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte konvexe Menge, und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion. Dann gibt es einen extremen Punkt a von A, wo das Maximum von f angenommen wird: $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in A$.*

Beweis Sei $\lambda = \max_{x\in A} f(x)$. Dann ist $L := \{x \in \mathbb{R}^n | \ f(x) = \lambda\}$ eine Stützebene von A und $F := L \cap A$ eine (nichtleere) Seite von A. Da F die konvexe Hülle ihrer extremen Punkte ist, hat sie mindestens einen extremen Punkt a. Nach dem obigen Lemma ist a auch ein extremer Punkt von A. Außerdem $f(x) = \lambda = \max_{x\in A} f(x)$. □

1.4.3 Extreme Punkte von Polyedern

Definition 1.4.3 *Ein Polyeder ist der Durchschnitt einer endlichen Anzahl von Halbräumen. Mit anderen Worten, ein Polyeder ist die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems.*

Proposition 1.4.5 *Sei P ein Polyeder, $P = \{x \in \mathbb{R}^n | \ \langle x, v_i\rangle \leq \beta_i$ für $i = 1, 2, \dots, m\}$. Für $a \in P$ bezeichne $I_a := \{i | \ \langle a, v_i\rangle = \beta_i\}$. Dann ist a ein extremer Punkt von P genau dann, wenn die Vektoren $\{v_i | i \in I_a\}$ den ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ aufspannen.*

Beweis Nehmen wir an, die Vektoren $\{v_i | \ i \in I_a\}$ spannen $\mathbb{R}^n$ nicht auf. Dann gibt es ein $u \in \mathbb{R}^n$, so dass $u \neq 0$ und $\langle u, v_i\rangle = 0$ für alle $i \in I_a$. Es gilt $\langle a + tu, v_i\rangle = \beta_i$ für alle $i \in I_a$. Außerdem haben wir $\langle a, v_j\rangle < \beta_j$ für alle $j \notin I_a$. Somit existiert es ein $\varepsilon > 0$, so dass $\langle a - \varepsilon u, v_j\rangle < \beta_j$ und

$\langle a + \varepsilon u, v_j \rangle < \beta_j$ für alle $j \notin I_a$ auch gilt. Dann ist a der Mittelpunkt der Strecke $[a - \varepsilon u, a + \varepsilon u]$ mit Endpunkten in P und somit kein extremer Punkt.

Jetzt nehmen wir an, dass Vektoren $\{v_i | i \in I_a\}$ den Raum $\mathbb{R}^n$ aufspannen. Angenommen, es gibt zwei Punkte $b, c \in P$ mit $a = \frac{b+c}{2}$. D. h. insbesondere $\langle b, v_i \rangle \leq \beta_i$ und $\langle c, v_i \rangle \leq \beta_i$ für alle $i \in I_a$. Folglich gilt $\langle b, v_i \rangle = \langle c, v_i \rangle = \beta_i$. Aber, da $\mathbb{R}^n$ von $\{v_i | \, i \in I_a\}$ aufgespannt wird, hat das lineare Gleichungssystem $\langle x, v_i \rangle = \beta_i$, $i \in I_a$ eine eindeutige Lösung. Somit $b = c = a$. □

Korollar 1.4.2 *Ein beschränkter Polyeder ist ein Polytop.*

Beweis Als Durchschnitt einer endlichen Anzahl von abgeschlossenen Mengen ist jeder Polyeder abgeschlossen. Wenn er dazu beschränkt ist, ist er kompakt. Dann, nach dem Satz 1.4.1 ist er die konvexe Hülle seiner extremen Punkte. Die obige Proposition beschreibt extreme Punkte von Polyedern. Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ durch m linearen Ungleichungen $\langle x, v_i \rangle \leq \beta_i$ bestimmt. Dann kann man jedem extremen Punkt a die Teilmenge von Ungleichungen zuordnen, die für a als Gleichungen gelten. Ferner, aus den zugehörigen Vektoren v_i, $i \in I_a$ kann man eine Basis von $\mathbb{R}^n$ wählen. Andererseits, jede n-elementige Teilmenge von $\{v_1, \ldots, v_m\}$, die eine Basis bildet, ergibt nur einen (oder gar keinen) extremen Punkt von P. Somit ist die Anzahl der extremen Punkte endlich und nicht größer als $\binom{m}{n}$. □

Die Umkehrung dieses Satzes gilt auch.

Satz 1.4.2 (Weyl-Minkowski) *Ein beschränkter Polyeder ist ein Polytop und umgekehrt.*

In der noch fehlenden Richtung (jeder Polytop ist ein Polyeder) werden wir diesen Satz in der nächsten Vorlesung beweisen. Allerdings kann man diesen Satz mit der bereits vorhandenen Technik beweisen (siehe z. B. Satz II.1.4 in Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*).

Aufgaben

1) Sei P ein Polytop, F eine Seite von P, und G eine Seite von F. Zeigen Sie, dass G eine Seite von P ist.

2) Zeigen Sie: Seite eines Polyeders ist ebenfalls ein Polyeder.

3) Seien A und B kompakte konvexe Mengen.

(a) Bestimmen Sie die Stützfunktion von $\mathrm{conv}(A \cup B)$ anhand der Stützfunktionen von A und B.

(b) Beschreiben Sie die Seiten von $\mathrm{conv}(A \cup B)$.

4) Konstruieren Sie eine kompakte konvexe Menge $A \subset \mathbb{R}^3$, so dass die Menge der extremen Punkte von A nicht abgeschlossen ist.

5) (The Diet Problem) Seien n verschiedene Lebensmittel gegeben. Man möchte eine bezüglich $m < n$ Inhaltsstoffe ausgeglichene Diät zusammenstellen (d. h., die Diät muss genau die gewünschte Menge von jedem Inhaltsstoff enthalten). Jedes Lebensmittel hat einen bestimmten Preis pro Einheit und enthält eine bestimmte Menge von jedem Inhaltsstoff. Zeigen Sie: zwischen den preisgünstigsten Diäten gibt es eine, die nicht mehr als m Lebensmittel verwendet.

1.5 Dualität

1.5.1 Definition und Eigenschaften

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht unbedingt konvexe Menge.

Definition 1.5.1 *Die zu A duale Menge ist*

$$A^* := \{v \in \mathbb{R}^n | \ \langle x, v\rangle \leq 1 \text{ für alle } x \in A\}$$

Proposition 1.5.1 *Es gelten die folgenden Eigenschaften:*

1) A^* *ist konvex, abgeschlossen und enthält* 0;

2) aus $A \subset B$ *folgt* $A^* \supset B^*$;

3) $(\bigcup_i A_i)^* = \bigcap_i A_i^*$;

4) $\{0\}^* = \mathbb{R}^n$, $\{x\}^* = H(x, 1)$ *für* $x \neq 0$;

5) für $\lambda > 0$ *gilt* $H(v, \lambda)^* = [0, \frac{1}{\lambda}v]$ *und* $[0, \frac{1}{\lambda}v]^* = H(v, \lambda)$.

Beweis 1) Falls $u, v \in A^*$, dann gilt $\langle x, \lambda u + \mu v \rangle \leq \lambda + \mu = 1$ für alle $x \in A$, $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$. Somit A^* konvex. Falls $(v_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von Punkten in A^* mit $\lim_{i \to \infty} v_i = v$ ist, dann konvergiert auch die Folge von Skalarprodukten $\langle x, v_i \rangle$, und gilt $\langle x, v \rangle = \lim_{i \to \infty} \langle x, v_i \rangle \leq 1$. Somit A^* abgeschlossen. $0 \in A^*$ ist klar.
2) Aus $v \in B^*$ folgt $\langle x, v \rangle \leq 1$ für alle $x \in B$, insbesondere für alle $x \in A$. Folglich liegt v auch in A^*.
3) $(\bigcup_i A_i)^* = \{v | \langle x, v \rangle \leq 1 \text{ für alle } x \in \bigcup_i A_i\} = \bigcap_i \{v | \langle x, v \rangle \leq 1 \text{ für alle } x \in A_i\} = \bigcap A_i^*$
4) Die erste Gleichung ist klar, die zweite folgt aus der Definition vom Halbraum $H(x, 1)$.
5) Nicht mehr so einfach. Nach der Definition gilt $u \in H(v, \lambda)^*$ genau dann, wenn $\langle x, u \rangle \leq 1$ für alle $x \in H(v, \lambda)$ ist. D. h., genau dann, wenn $H(v, \lambda) \subset H(u, 1)$. Es ist klar, dass die letzte Inklusion nur in dem Fall gilt, wenn die Normalenvektoren v und u parallel und gleichgerichtet sind. Also setzen wir $u = \mu v$. Bemerke: $H(v, \lambda) = H(\frac{1}{\lambda} v, 1)$ für $\lambda > 0$. Nun ist es nicht schwer zu sehen, dass $H(\frac{1}{\lambda} v, 1) \subset H(\mu v, 1)$ genau dann gilt, wenn $\mu \leq \frac{1}{\lambda}$. Ferner, $[0, \frac{1}{\lambda} v]^* = \{x | \langle \mu v, x \rangle \leq 1 \text{ für alle } \mu \in [0, \frac{1}{\lambda}]\} = \{x | \langle \frac{1}{\lambda} v, x \rangle \leq 1\} = H(\frac{1}{\lambda} v, 1) = H(v, \lambda)$. $\square$
Bemerkung Für $\lambda \leq 0$ gilt $H(v, \lambda)^* = \mathbb{R}_+ v = \{\mu v | \mu \geq 0\}$, also hängt von λ nicht ab und ist nicht interessant. Geometrisch lassen sich die Halbräume mit dem Parameter $\lambda > 0$ von den Halbräumen mit $\lambda \leq 0$ dadurch unterscheiden, dass für die ersten der Punkt 0 ein innerer Punkt ist, für die letzten nicht.

Satz 1.5.1 *Sei A konvex, abgeschlossen, und sei $0 \in A$. Dann gilt $(A^*)^* = A$.*

Beweis Sei $x \in A$. Dann folgt aus der Definition: $\langle v, x \rangle \leq 1$ für alle $v \in A^*$. Das heißt aber, dass $A \subset (A^*)^*$ gilt (dazu brauchen wir keine Bedingungen für A). Andererseits, sei $x \notin A$. Dann gibt es eine Trennhyperebene für x und A. Sei H der dieser Hyperebene zugehörige Halbraum, der A enthält. Dann gilt nach dem 2. Punkt obiger Proposition:

$$A \subset H \Longrightarrow A^* \supset H^* \Longrightarrow (A^*)^* \subset (H^*)^*$$

Da $0 \in A$ und $A \subset \mathrm{int}(H)$, ist 0 ein innerer Punkt von H. Also hat H die Form $H(v, \lambda)$ mit $\lambda > 0$. Dann folgt aus dem Punkt 5. obiger Proposition $(H^*)^* = H$. Somit $(A^*)^* \subset H$, und $x \notin (A^*)^*$. $\square$
Bemerkung Im allgemeinen gilt:

$$(A^*)^* = \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(A \cup \{0\})),$$

also ist $(A^*)^*$ die kleinste konvexe abgeschlossene Menge, die 0 enthält.

Als eine interessante Tatsache erwähnen wir die folgende

Proposition 1.5.2 *Seien*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} |x^i|^p \leq 1\}, \qquad B = \{y \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} |y^i|^q \leq 1\}$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q > 0$. *Dann sind die Mengen* A *und* B *konvex und gilt* $A^* = B$, $B^* = A$.

Die Behauptung über Konvexität von A folgt aus der Minkowski-Ungleichung, die Behauptung über Dualität zwischen A und B folgt aus der Hölder-Ungleichung.

1.5.2 Anwendungen von Dualität

Bezeichne mit $K(0, d)$ die Kugel mit Zentrum 0 und Radius d. Es ist nicht schwer zu sehen, dass $K(0, d)^* = K(0, \frac{1}{d})$ ist. Unter Verwendung des Punktes 2. der Proposition 1.5.1 folgt daraus:

Proposition 1.5.3 *Die duale Menge* A^* *ist genau dann beschränkt, wenn* A *im Inneren* 0 *enthält. Und umgekehrt:* $0 \in \text{int}(A^*)$ *genau dann, wenn* A *beschränkt ist.*

Nun können wir jetzt den Satz von Weyl und Minkowski aus der letzten Vorlesung komplett beweisen. Der Beweis gliedert sich in die folgende Schritte.

Proposition 1.5.4 *Sei* A *ein Polytop. Dann ist* A^* *ein Polyeder.*

Beweis Sei $A = \text{conv}\{x_1, \ldots, x_m\}$. Bezeichnen wir $B := \bigcap_{i=1}^m H(x_i, 1)$. Wir werden zeigen: $A^* = B$. Einerseits gilt

$$B = \{x_1, \ldots, x_m\}^* \supset \text{conv}\{x_1, \ldots, x_m\}^* = A^*.$$

Andererseits,

$$B \subset H(x_i, 1) \Longrightarrow B^* \supset H(x_i, 1)^* = [0, x_i] \ni x_i \Longrightarrow B^* \supset \{x_1, \ldots, x_m\}.$$

Da B konvex ist, folgt daraus $B^* \supset \text{conv}\{x_1, \ldots, x_m\} = A$.

Offenbar $0 \in B$. Nach dem Satz 1.5.1 gilt dann $(B^*)^* = B$. Aus obigem $A \subset B^*$ folgt dann $A^* \supset (B^*)^* = B$. Wir haben auch $A^* \supset B$ gezeigt, somit $A^* = B$ ein Polyeder. $\square$

Korollar 1.5.1 *Sei A ein Polytop,* $0 \in \mathrm{int}(A)$. *Dann ist A^* ebenfalls ein Polytop.*

Beweis Nach dem oben bewiesenen ist A^* ein Polyeder. Außerdem ist A^* beschränkt nach der Proposition 1.5.3. Aber jeder beschränkte Polyeder ist ein Polytop. □

Satz 1.5.2 *Ein Polytop ist ein beschränkter Polyeder.*

Beweis Sei A ein Polytop. Betrachten wir A als Teilmenge ihrer affinen Hülle und wählen wir den Koordinatenursprung im Inneren von A. (Bei einer Einschränkung des umgebenden Raumes oder einer Parallelverschiebung bleibt ein Polytop ein Polytop und ein Polyeder ein Polyeder. Wenn es kein Polytop (bzw. kein Polyeder) war, kann es nicht ein Polytop (ein Polyeder) werden. Deswegen dürfen wir mit A so umgehen.) Wegen des obigen Korollars ist A^* ein Polytop. Und nach der Proposition 1.5.4 ist die zu A^* duale Menge $A = (A^*)^*$ ein Polyeder. Als Polytop ist A beschränkt, somit ist es ein beschränkter Polyeder. □

Ich habe versprochen, die Charakterisierung der Stützfunktion mittels Dualität zu beweisen. Beginnen wir mit der Frage: Was ist die Stützfunktion von A^*? Wie lässt sie sich direkt durch die Menge A definieren? Die Antwort sieht sehr einfach aus.

Unten betrachten wir nur kompakte konvexe Mengen, die 0 im Inneren enthalten. Falls A so eine Menge ist, hat A^* auch diese Eigenschaften.

Definition 1.5.2 *Die Distanzfunktion von A ist $d_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch $d_A(0) = 0$ und*

$$d_A(x) = \min\{\lambda \in \mathbb{R} |\ \lambda \geq 0,\ \frac{1}{\lambda} x \in A\} \text{ für } x \neq 0.$$

Bemerkungen 1) Es ist einfach zu sehen, dass jeder von 0 ausgehende Strahl den Rand von A genau in einem Punkt trifft. Das erlaubt eine andere, anschauliche Definition von d_A zu geben: Für einen Einheitsvektor v ist $d_A(v)$ das Inverse zum Abstand vom 0 zum Rand von A in der Richtung v. Auf die Vektoren mit Norm anders als 1 ist die Funktion durch positive Homogenität fortgesetzt. Mit einer Formel:

$$d_A(\lambda \overline{x}) = \lambda, \text{ wobei } \overline{x} \in \partial A,\ \lambda \geq 0.$$

2) Die Distanzfunktion ist positiv homogen.
3) Folgendes ist auch offenbar:

$$x \in A \Longleftrightarrow d_A(x) \leq 1$$
$$x \in \partial A \Longleftrightarrow d_A(x) = 1$$

Satz 1.5.3 *Die Stützfunktion von der dualen Menge ist die Distanzfunktion der ursprünglichen Menge und umgekehrt:* $s_{A^*} = d_A$, $d_{A^*} = s_A$.

Beweis Dank des Satzes 1.5.1 reicht es, nur eine von diesen Gleichungen zu zeigen. Beweisen wir die zweite. Erinnern wir:

$$s_A(v) = \max_{x \in A} \langle x, v \rangle$$

Daraus folgt: $\langle x, v \rangle \leq s_A(v)$ für alle $x \in A$. D. h. $\langle x, \frac{v}{s_A(v)} \rangle \leq 1$ für alle $v \neq 0$ (es gilt nämlich $s_A(v) > 0$ wegen $0 \in \mathrm{int}(A)$). Nach der Definition von A^* gilt dann $\frac{v}{s_A(v)} \in A^*$. Aus den obigen Eigenschaften der Distanzfunktion folgt: $d_{A^*}(\frac{v}{s_A(v)}) \leq 1$ und somit $d_{A^*}(v) \leq s_A(v)$.

Angenommen, für ein v haben wir $d_{A^*}(v) = \lambda < s_A(v)$. Daraus folgt $d_{A^*}(\frac{v}{\lambda}) = 1$ und $\frac{v}{\lambda} \in A^*$. Somit $\langle x, \frac{v}{\lambda} \rangle \leq 1$ für alle $x \in A$. D. h. $\langle x, v \rangle \leq \lambda$ für alle x, was für $\lambda < s_A(v)$ der Definition von $s_A(v)$ widerspricht. □

Korollar 1.5.2 *Die Distanzfunktion ist konvex.*

Satz 1.5.4 *Jede konvexe, positiv homogene, positive auf* $\mathbb{S}^{n-1}$ *Funktion ist die Distanzfunktion einer kompakten konvexen Menge mit* 0 *im Inneren.*

Beweis Sei $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die die obengenannte Bedingungen erfüllt. Definieren wir $A := \{x | \, d(x) \leq 1\}$. Konvexität von A folgt direkt aus der Konvexität (nach unten) von d. Ferner, d ist stetig, weil sie konvex ist. (In diesem speziellen Fall kann man es auch einfacher beweisen: Wähle auf $\mathbb{S}^{n-1}$ $n+1$ Punkte, die die Ecken eines Simplex Δ sind, der 0 im Inneren enthält. Dann ist d auf dem Rand von Δ von oben beschränkt — wegen der Konvexität. Von unten ist d mit 0 beschränkt. Nun lässt sich die Stetigkeit mit Hilfe der positiven Homogenität genau wie in der Proposition 3.3 beweisen.) Folglich, gibt es $c = \min_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} d(x) > 0$ und $C = \max_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} d(x)$. Dann gilt $K(0, \frac{1}{C}) \subset A \subset K(0, \frac{1}{c})$, d. h. $0 \in \mathrm{int}(A)$ und A ist beschränkt. Zuletzt, A ist abgeschlossen als das Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung.

Die Gleichung $d_A = d$ folgt direkt aus der Definition von A und der positiven Homogenität von d. □

Satz 1.5.5 *Jede konvexe, positiv homogene Funktion ist die Stützfunktion einer kompakten konvexen Menge.*

Beweisskizze Falls die Zusatzbedingung "positiv auf $\mathbb{S}^{n-1}$" erfüllt ist, dann ist unsere Funktion s die Distanzfunktion einer Menge, und folglich die Stützfunktion der dualen. Falls die Funktion nicht positiv auf der Sphäre ist, kann sie durch die folgende zwei Schritte positiv gemacht werden. Erstens, finde ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so dass $s'(v) := s(v) - \langle x_0, v\rangle$ nichtnegativ auf $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist. Zweitens, bemerke, dass die Menge aller Vektoren, worauf s' positiv ist, zusammen mit 0 einen linearer Teilraum L von $\mathbb{R}^n$ bildet. Auf L eingeschränkt, ist s' die Stützfunktion einer kompakten konvexen Menge A mit 0 im Inneren (bezüglich L!). Nun zeige, dass $s = s_{A+x_0}$ gilt. □

1.5.3 "Spiegel der Dualität"

Fassen wir einiges zusammen. Auf die abgeschlossenen konvexen 0 enthaltenden Mengen wirkt Dualität wie eine Spiegelung: die Duale zur Dualen ist die Menge selbst. Jede Behauptung über konvexe Mengen dieser Art kann auf die Sprache der dualen Welt übersetzt werden. So, für jede Eigenschaft $\mathcal{E}$ gibt es die Duale Eigenschaft $\mathcal{E}^*$, die folgendermaßen definiert wird: eine Menge A besitzt die Eigenschaft $\mathcal{E}$ genau dann, wenn die duale Menge A^* die Eigenschaft $\mathcal{E}^*$ besitzt. (Formell gesagt, ist jede sich auf die konvexen Mengen beziehende Eigenschaft $\mathcal{E}$ eine Teilmenge der Menge $\mathcal{C}$ aller konvexen Mengen: man sagt, dass A die Eigenschaft $\mathcal{E}$ besitzt, falls $A \in \mathcal{E}$. Die duale Eigenschaft ist dann nichts anderes als $\{A^* |\, A \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{C}$.) Zum Beispiel,

1) "beschränkt zu sein" ist dual zu "0 im Inneren zu enthalten";

2) "ein Polytop zu sein" ist dual zu "Polyeder zu sein".

Jede Operation mit konvexen Mengen hat auch ihre duale: man schaut, was mit den Mengen "im Spiegel" geschieht. Nehmen wir, z. B. die Proposition 1.5.1, Punkt 3. Es lässt sich einfach beweisen, dass auch $(\mathrm{conv}(\bigcup_i A_i))^* = \bigcap_i A_i^*$ gilt. Somit: das Bilden vom Durchschnitt ist dual zum Bilden von der konvexen Hülle von der Vereinigung. Ein interessanter spezieller Fall ist: das Abschneiden mittels einer Hyperebene ist dual zum Bilden eines Kappenkörpers (die konvexe Hülle von der Menge vereinigt mit einem Punkt). Analog ist die Berechnung von der Stützfunktion zur Berechnung von der Distanzfunktion dual.

Wir haben gesehen, wie nützlich diese Überlegungen sein können. Nämlich, jeder Satz über konvexe Mengen lässt sich auch dualisieren, weil ein Satz eine Aussage über Eigenschaften von Objekten (ggf. nach der Anwendung von Operationen darstellt). Und der duale Satz gilt, falls der ursprüngliche Satz gilt. So, durch Dualisierung des Satzes "jeder beschränkte Polyeder ist ein Polytopërhalten wir den Satz "jeder Polytop ist ein beschränkter Polyeder". Man sieht hier zwei Vorteile: erstens, man kriegt doppelt so viele Sätze beim selben Aufwand; zweitens, falls ein Satz schwer zu beweisen scheint, kann man versuchen, statt dem den dualen zu beweisen. So haben wir die Charakterisierung der Stützfunktion behandelt (obwohl es immer noch Haken bleiben können...).

Sogar die Beweise lassen sich dualisieren: Ein Beweis ist eine Folge von einfachen Schlussen, und man kann hoffen, dass die zu einem einfachen Schluss duale Feststellung auch einfach und klar ist.

Ein anderer wohlbekannter Beispiel der Dualität ist die projektive Dualität. Sie ist dem oben betrachteten Fall verwandt, entsteht aber im anderen Kontext. Wenn man, zum Beispiel, die Frage stellt, was ist zur Parallelverschiebung dual (wobei 0 in der Menge bleibt), dann ist die Antwort: die duale Menge wird mit einer Projektivtransformation umgeformt.

Aufgaben

1) Zeigen Sie: Falls $A^* = A$ gilt, dann ist A die Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^n | \, |x| \leq 1\}$.

2) Bestimmen Sie die duale Menge zur Ellipse
$$\{(x,y)| \, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

3) (a) (Jedes Polytop ist eine Projektion eines Simplex.) Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop, $\dim P = n$. Zeigen Sie: Es gibt ein $m > n$ und einen Simplex $\Delta \subset \mathbb{R}^{m-1}$, so dass $P = \mathrm{pr}(\Delta)$ gilt, pr — die Projektion von $\mathbb{R}^{m-1}$ auf $\mathbb{R}^n$. (Ein Simplex in $\mathbb{R}^{m-1}$ ist die konvexe Hülle von m affin unabhängigen Punkten.)

   (b) (Jedes Polytop ist ein Schnitt eines Simplex.) Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop, $\dim P = n$. Zeigen Sie: Es gibt einen Simplex $\Delta \subset \mathbb{R}^{m-1}$, so dass $P = \mathbb{R}^n \cap \Delta$ gilt.

4) Seien auf der 2-dimensionalen Sphäre n Punkte gegeben, so dass keine 3 von ihnen auf einem großen Kreis liegen. Wie viele verschiedenen großen Kreise kann man auf der Sphäre zeichnen? Zwei Kreise heißen hier verschieden, falls einer in den anderen nicht deformiert werden kann, ohne über einen von den Punkten während der Deformation zu gehen.

5) Vervollständigen Sie den Beweis des Satzes 5.5 aus der Vorlesung.

1.6 Dualität und Polytope

Bemerkung Üblicherweise nennt man die Korrespondenz $A \leftrightarrow A^*$ Polarität. Als Dualität bezeichnet man die Korrespondenz zwischen Teilmengen von einem Vektorraum und Teilmengen vom zu ihm dualen Raum, die durch die gleiche Formel wie in der Definition 5.1 gegeben wird, wobei aber $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für die kanonische Paarung (zwischen Vektoren und linearen Funktionalen) steht. Ein Skalarprodukt definiert einen Isomorphismus zwischen dem Vektorraum und dem dualen Raum, indem einem Vektor x das Funktional $l_x : y \mapsto \langle x, y \rangle$

zugeordnet wird. Dieser Isomorphismus führt die zu A polare Menge in die zu A duale über. Also, falls das Skalarprodukt festgelegt wird, ist es möglich, zwischen der Dualität und Polarität nicht zu unterscheiden.

1.6.1 Korrespondenz zwischen Seiten eines Polytops und Seiten des dualen Polytops

Für Polytope gilt die Umkehrung der Proposition 4.3:

Proposition 1.6.1 *Falls x ein extremer Punkt von einem Polytop P ist, dann ist $\{x\}$ eine Seite von P.*

Beweis Induktion nach der Dimension von P.

Basis: Sei $\dim P = 1$. Dann ist P eine Strecke und x ist ein Endpunkt. Die zur Strecke orthogonale Hyperebene durch einen Endpunkt ist eine Stützebene und trifft die Strecke nur in diesem Endpunkt. (Der Fall, wenn der umgebende Raum Dimension 1 hat, muss Sie nicht verwirren. Dann ist jede Hyperebene 0-dimensional und besteht aus einem Punkt.)

Schritt: Jeder extreme Punkt ist ein Randpunkt, und jeder Randpunkt liegt auf einer Seite. Sei F eine echte Seite von P, so dass $x \in F$. Dann ist x ein extremer Punkt von P (Lemma 4.1.1). Da $\dim F < \dim P$ gilt, folgt aus der Induktionsannahme, dass $\{x\}$ eine Seite von F ist. Somit ist $\{x\}$ auch eine Seite von P (Aufgabe 1, Blatt 4). □

Definition 1.6.1 *Sei P ein Polytop. Jeder Punkt von P, der eine 0-dimensionale Seite bildet, heißt eine Ecke von P. Eine Seite F von P heißt eine Facette, falls* $\dim F = \dim P - 1$ *gilt.*

Bemerkung Ein Punkt, der eine 0-dimensionale Seite einer konvexen Menge bildet, heißt ein exponierter Punkt (exposed point).

Als nächstes werden wir eine bijektive Korrespondenz zwischen den Seiten des Polytops P und den Seiten des dualen Polytops P^* herstellen, die den Ecken die Facetten zuordnet, und überhaupt, kleineren Seiten — grössere.

Satz 1.6.1 *Sei P ein Polytop mit $0 \in \mathrm{int}P$. Falls F eine Seite von P ist, dann definiere*

$$\widehat{F} = \{v \in P^* | \langle x, v\rangle = 1 \text{ für alle } x \in F\}$$

(Es wird automatisch $\widehat{\emptyset} = P^*$, $\widehat{P} = \emptyset$ erfüllt.) Dann:

1) die Menge $\widehat{F}$ ist eine Seite von P^* und

$$\dim F + \dim \widehat{F} = \dim P - 1;$$

2) falls $F \subset G$ sind Seiten von P, es folgt $\widehat{F} \supset \widehat{G}$;

3) für jede Seite V von P^* definiere analog zum obigen

$$\widehat{V} = \{x \in P | \, \langle x, v \rangle = 1 \text{ für alle } v \in V\}$$

Dann gilt $\widehat{\widehat{F}} = F$ für jede Seite F von P.

Beweis Der 1. Punkt ist für $F = \emptyset$ oder $F = P$ leicht nachzuprüfen. Also nehmen wir an, dass F eine echte Seite von P ist. Sei $P = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_m\}$, und sei $F = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_l\}$, wobei $\{x_1, \ldots, x_l\} = F \cap \{x_1, \ldots, x_m\}$. Bezeichne $x_0 := \frac{1}{l}(x_1 + \cdots + x_l)$. Wir werden zeigen:

$$\widehat{F} = \{v \in P^* | \, \langle x_0, v \rangle = 1\}$$

Tatsächlich, wegen $x_0 \in F$ gilt $\langle x_0, v \rangle = 0$ für alle $v \in \widehat{F}$. Andererseits, da für alle $v \in P^*$ gilt $\langle x_i, v \rangle \leq 1$ für $i = 1, \ldots, l$, aus $\langle x_0, v \rangle = 1$ folgt $\langle x_i, v \rangle = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, l\}$. Somit $\widehat{F} = P^* \cap L(x_0, 1)$ ist eine Seite von P^*.

Sei $\dim F = k$. Bestimmen wir die Dimension von $\widehat{F}$. Einerseits ist $\widehat{F}$ in der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\langle x_i, v \rangle = 1, \; i = 1, \ldots, l$$

enthalten. Da $\dim \operatorname{aff}\{x_1, \ldots, x_l\} = k$ und $0 \notin \operatorname{aff}\{x_1, \ldots, x_l\}$, gilt

$$\dim \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_l\} = k + 1$$

D. h., der Rang des obigen Systems ist gleich $k+1$, und ihre Lösungsmenge ist ein $(n-k-1)$-dimensionaler affiner Teilraum. Folglich, $\dim \widehat{F} \leq n-k-1$.

Für die Umkehrung der Ungleichung betrachte die F enthaltende Stützebene von P. Es gibt nämlich ein v_0, so dass

$$\langle x_i, v_0 \rangle = 1 \text{ für } i = 1, \ldots, l \qquad \text{und} \qquad \langle x_i, v_0 \rangle < 1 \text{ für } i = l+1, \ldots, m$$

Das bedeutet insbesondere, dass $v_0 \in \widehat{F}$. Falls nun w eine Lösung des Systems $\langle x_i, w \rangle = 0$ ist, gilt $v_0 + \varepsilon w \in \widehat{F}$ für ein genügend kleines ε. Da die

Lösungsmenge, wie gezeigt, Dimension $n - k - 1$ hat, folgt daraus $\dim \widehat{F} \geq n - k - 1$. Somit ist der 1. Punkt bewiesen.

Die Behauptung des 2. Punktes folgt unmittelbar aus der Definition von $\widehat{F}$ und $\widehat{G}$.

Zum Punkt 3. Falls $x \in F$, dann gilt $\langle x, v \rangle = 1$ für alle $v \in \widehat{F}$. Folglich, $F \subset \widehat{\widehat{F}}$. Jetzt kommt ein Trick namens Dimensionsvergleich. Unter Anwendung des 1. Punktes folgt $\dim \widehat{\widehat{F}} = \dim F$. Aber F ist eine Seite von $\widehat{\widehat{F}}$ (es ist leicht zu zeigen: falls F und G Seiten von A sind, und $F \subset G$, dann ist F eine Seite von G). Folglich, $F = \widehat{\widehat{F}}$. $\square$

Kurz kann man den Inhalt dieses Satzes wie folgt zusammenfassen: Die Abbildung $F \mapsto \widehat{F}$ stellt eine Bijektion zwischen den Seitenmengen von P und P^* her, diese Bijektion ist inklusionsumkehrend. Wir werden die Seite $\widehat{F}$ "die zu F duale Seite" nennen, obwohl F und $\widehat{F}$ als Mengen nicht zueinander dual sind.

1.6.2 Beispiele und Anwendungen

In der Dimension 3 sind Ecken zu 2-dimensionalen Seiten dual, und Kanten zu Kanten. Berühmte Paare von dualen 3-Polytopen sind die reguläre Polytope (Platonische Körper). Tetraeder ist zu sich selbst dual, Würfel zum Oktaeder, Dodekaeder zum Ikosaeder.

Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ ein n-dimensionaler Simplex mit $0 \in \operatorname{int}(\Delta)$. Sei $\Delta = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$. Dann ist $\Delta^* = \bigcap_{i=1}^{n+1} H(x_i, 1)$ (siehe den Beweis der Proposition 5.4) der Durchschnitt von $n+1$ Halbräumen. Man kann zeigen, dass Δ^* ebenfalls ein Simplex ist (in Dimensionen 2 und 3 ist es anschaulich klar). Und zwar, aus der Beschreibung von extremen Punkten eines Polyeders (Proposition 4.5) folgt, dass Δ^* nicht mehr als $n+1$ extreme Punkte hat. Andererseits ist Δ^* ein n-dimensionales Polytop.

Sei $P = \operatorname{conv}\{e_1, -e_1, \dots, e_n, -e_n\}$, wobei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist. Dann heißt P Kreuzpolytop. In der Dimension 3 ist es ein Oktaeder. Bestimmen wir das duale Polytop P^*. Es gilt $P^* = \bigcap_{i=1}^{n} H(\pm e_i, 1)$. Dabei $H(e_i, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n |\, x^i \leq 1\}$ und $H(-e_i, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n |\, x^i \geq -1\}$. Also ist $P = \{x \in \mathbb{R}^n |\, |x^i| \leq 1 \text{ für alle } i\}$ ein Würfel.

Beschreiben wir jetzt die Korrespondenz zwischen den Seiten von P und P^* etwas genauer. Sei $P = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_m\}$ ein Polytop. Wie wir es aus dem Beweis der Proposition 5.4 wissen, gilt $P^* = \bigcap_{i=1}^{m} H(x_i, 1)$. Nehmen wir an, dass $x_1, \dots, x_m$ Ecken von P sind. (D. h., wir wählen aus der ursprünglichen

P aufspannender endlichen Menge nur die extreme Punkte von P. Die konvexe Hülle bleibt dabei wegen des Satzes 4.1 unverändert.) Dann hat der Polytop P^* genau m Facetten $X_i := P^* \cap L(x_i, 1)$. Aus der Definition von $\widehat{F}$ folgt:

$$\widehat{F} = P^* \cap (\bigcap_{i=1}^{l} L(x_i, 1)) = \bigcap_{i=1}^{l} X_i$$

Da jedes Polytop dual zu seinem dualen ist, erhalten wir

Proposition 1.6.2 *Jede Seite eines Polytops ist der Durchschnitt von Facetten.*

Die duale zu dieser Behauptung lautet: jede Seite eines Polytops ist die konvexe Hülle von Ecken.

Definition 1.6.2 *Ein Polytop heißt simplizial, falls jede von seinen echten Seiten ein Simplex ist. Ein Polytop P heißt einfach, falls jede echte Seite F von ihm genau in* $\dim P - \dim F$ *Facetten enthalten ist.*

Proposition 1.6.3 *Das duale zu einem simplizialen Polytop ist ein einfaches Polytop und umgekehrt.*

Beweis Sei F eine Seite eines Polytops P. Dann gilt: F ist ein Simplex $\Longleftrightarrow$ F hat $\dim F + 1$ Ecken $\Longleftrightarrow$ $\widehat{F}$ ist in genau $\dim F + 1 = \dim P - \dim \widehat{F}$ Facetten enthalten. Wenn jetzt F über allen echten Seiten von P variiert, dann variiert auch $\widehat{F}$ über allen echten Seiten von P^*, und die Behauptung folgt. $\Box$

Ein Kreuzpolytop ist ein simpliziales Polytop, ein Würfel ist ein einfaches Polytop. Ein Simplex ist gleichzeitig simplizial und einfach.

Es ist nicht schwer zu beweisen, dass alle Facetten eines Polytops P genau dann die Einheitssphäre mit Zentrum 0 berühren, wenn alle Ecken des dualen Polytops P^* auf dieser Sphäre liegen.

Aufgaben

1) Sei Δ ein Simplex mit dem Schwerpunkt 0. Zeigen Sie, dass das Simplex Δ^* ebenfalls 0 als der Schwerpunkt hat.

2) Seien A_1 und A_2 zwei konvexe Mengen. Zeigen Sie: für jede Seite F von $A_1 \cap A_2$ gilt $F = F_1 \cap F_2$, wobei F_1 eine Seite von A_1 und F_2 eine Seite von A_2 ist.

3) Sei $F, \widehat{F}$ ein Paar von dualen Seiten. Bezeichnen wir $L = \operatorname{aff}(F), \widehat{L} = \operatorname{aff}(\widehat{L})$. Sei x der nächstliegende zu 0 Punkt in L, und $\widehat{x}$ der nächstliegende zu 0 Punkt in $\widehat{L}$. Zeigen Sie: Punkte $x, 0, \widehat{x}$ liegen auf einer Gerade, und $\operatorname{dist}(x, \widehat{x}) = \operatorname{dist}(L, \widehat{L})$.

4) Seien e_1, e_2, e_3, e_4 Vektoren der Standartbasis des $\mathbb{R}^4$. Sei

$$P = \operatorname{conv}\{\frac{e_i + e_j}{\sqrt{2}}, \frac{e_i - e_j}{\sqrt{2}}, \frac{-e_i - e_j}{\sqrt{2}} \mid 1 \leq i, j \leq 4,\ i \neq j\}$$

Zeigen Sie, dass P^* und P bis auf eine Bewegung gleich sind. Das Polytop P heißt 24-Zelle.

5) Zeigen Sie: Ein Polytop ist genau dann simplizial, wenn jede von seinen Facetten ein Simplex ist. Ein Polytop P ist genau dann einfach, wenn jede von seinen Ecken genau in $\dim P$ Facetten enthalten ist.

Hinweise

1) Was wissen wir über Skalarprodukte $\langle x_i, v_j \rangle$, wobei x_i eine Ecke von Δ, v_j eine Ecke von Δ^* ist?
2) Benutze, dass jede Seite Durchschnitt von Facetten ist. Was sind Facetten von $P \cap Q$?
3) Betrachte den Durchschnitt $\operatorname{span}(F) \cap \operatorname{span}(\widehat{F})$. Lese noch einmal den Beweis des 1. Punktes des Satzes 6.1 (über Dimensionen von F und $\widehat{F}$).

Kommentare

Ein klassisches Werk über konvexe Mengen ist [2]. Außer kurz und bündig dargestellten Theorie findet man dort auch zahlreiche spezielle Probleme. Eine ausfürliche Darstellung von Anwendungen und Verbindungen des Satzes von Helly ist [3]. Weitere Beispiele findet man in [1]. Mehr eingehend als bei uns sind die Grundlagen in [1] und [7] dargestellt. Zur Darstellung von unbeschränkten Polyeder durch ihre Extremelemente siehe ebenfalls die zwei letzten Quellen. Zur Dualität, darunter auch in der linearen Optimierung, siehe [1]. Über Polytope siehe [11].

Kapitel 2

Volumen, Flächeninhalt und ihre Verwandten

2.1 Gemischte Volumina: Satz von Minkowski

Wir beginnen jetzt ein neues Thema und passen die Bezeichnungen an. Ab sofort wird K einen *konvexen Körper* bezeichnen, d. h. eine kompakte konvexe Menge. Die Einheitskugel mit Zentrum 0 wird mit B bezeichnet werden.

2.1.1 Zum Volumen und Flächeninhalt

Das Volumen ist ein klarer Begriff für den normalen Menschenverstand, der ziemlich schwer mathematisch zu begründen ist. Es existieren sogar (in der Mathematik, nicht für den normalen Verstand) beschränkte Mengen, die nicht messbar sind. Glücklicherweise, verhalten sich die konvexen Körper in dieser Hinsicht gut.

Wir geben die Definition des Volumens eines konvexen Körpers, werden aber die Wohldefiniertheit und die üblichen Eigenschaften nicht beweisen. Beachten Sie, dass es immer um den sogenannten n-dimensionalen Volumen geht, wenn wir Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ betrachten. Falls $K \subset \mathbb{R}^n$ ein k-dimensionaler konvexer Körper mit $k < n$ ist, dann ist das n-dimensionale Volumen von K gleich 0, aber K als Teilmenge von $\mathrm{aff}(K)$ hat ein nichtverschwindendes k-dimensionales Volumen $\mathrm{vol}_k(K)$.

Zuerst definiert man das Volumen eines konvexen Polytops. Das kann,

z. B., mit Hilfe der Induktion gemacht werden. Nämlich, nimm einen Punkt im Inneren und zerlege das Polytop in Pyramiden über den Facetten. Definiere dann das Volumen einer (n-dimensionalen) Pyramide als

$$\frac{1}{n} \cdot h \cdot \mathrm{vol}_{n-1}F$$

wobei h die Höhe, $\mathrm{vol}_{n-1}F$ das $(n-1)$-dimensionale Volumen der Basis der Pyramide ist. Setze das Volumen des Polytops gleich der Summe der Volumina von Pyramiden. Als Basis der Induktion definiere das 1-dimensionale Volumen einer Strecke als deren Länge.

Definition 2.1.1 *Sei K ein konvexer Körper. Bezeichne*

$$\begin{aligned} \underline{J}(K) &:= \sup\{\mathrm{vol}(P) \mid P \subset K,\ P \textit{ ein Polytop}\} \\ \overline{J}(K) &:= \inf\{\mathrm{vol}(P) \mid P \supset K,\ P \textit{ ein Polytop}\} \end{aligned}$$

Definiere das Volumen von K als $\mathrm{vol}(K) := \underline{J}(K) = \overline{J}(K)$.

Wir nehmen ohne Beweis an, dass $\underline{J}(K) = \overline{J}(K)$ gilt und die so definierte Größe alle dem Volumen zugehörige Eigenschaften hat.

Bemerkung Die oben definierten Größen $\underline{J}$ und $\overline{J}$ heißen die innere, bzw. äußere Jordansche Maß von K. Öfter definiert man die Jordansche Maß nicht durch Polytope, sondern durch Mengen, die aus Würfeln eines Gitters bestehen.

Analog zum obigen kann man den Flächeninhalt vom Rand eines konvexen Körpers definieren. Man nimmt die Summe der $(n-1)$-dimensionalen Volumina von Facetten für den Flächeninhalt des Randes des Polytops und setzt:

$$\begin{aligned} \mathrm{area}(\partial K) &:= \sup\{\mathrm{area}(P) \mid P \subset K,\ P \text{ ein Polytop}\} \\ &= \inf\{\mathrm{area}(P) \mid P \supset K,\ P \text{ ein Polytop}\} \end{aligned}$$

Konvexe Körper sind aber nicht ganz harmlos. Es gibt eine Definition der Länge einer Kurve als die kleinste obere Schranke der Längen der eingeschriebenen gebrochenen Linien (Polygonzüge). Kurven, für welche diese Schranke existiert, heißen rektifizierbar. Nicht alle Kurven sind rektifizierbar, aber der Rand einer konvexen 2-dimensionalen Figur doch. Der Versuch, diese Definition direkt auf die höhere Dimensionen zu verallgemeinern, führt zu einem Fehler. Nämlich, es ist möglich, in einen Zylinder eine polygonale Fläche von beliebig großem Flächeninhalt einzuschreiben. Ein Beispiel wurde von Hermann Schwarz gefunden und wird manchmal "Schwarzscher Stiefel" genannt.

Der Schwarzsche Stiefel besteht aus gestapelten Antiprismen. Eine Antiprisma hat zwei reguläre m-Ecke als Boden- und Deckfläche. Im Unterschied zum Prisma sind beide m-Ecke aber um einen Winkel von $\frac{\pi}{m}$ gegeneinander verdreht. Seitenflächen sind, wie man sieht, Dreiecke. Wenn nun die Höhen aller Antiprismen im Vergleich zur Seitenlänge des m-Eckes klein sind, hat der Stapel von Antiprismen die Oberfläche, die als Harmonika aussieht und einen großen Flächeninhalt verbirgt. Die genaue Berechnung dieses Flächeninhaltes finden Sie, z. B. im Buch von Radó "Length and Area".

2.1.2 Hausdorff-Distanz zwischen konvexen Körper

Zuerst ein Paar Worte über lineare Kombinationen von konvexen Körpern. Diese werden Hauptpersonen im nächsten Abschnitt sein, treten aber bereits in diesem in einer Nebenrolle auf.

Definition 2.1.2 *Seien $K_1, \ldots, K_m$ konvexe Körper, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ nichtnegative reelle Zahlen. Dann definiere:*

$$\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_m K_m := \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m |\, x_i \in K_i \text{ für } i = 1, \ldots, m\}$$

Insbesondere ist λK eine Streckung von K, und $K + L$ ist die Minkowski-Summe. Wir lassen negative Koeffizienten in linearen Kombinationen aufgrund seinen ungünstigen Eigenschaften nicht zu. Zum Beispiel, $K+(-K) \neq 0$. Im Gegenteil, für nichtnegative λ und μ gilt das Distributivgesetz: $\lambda K + \mu K = (\lambda + \mu)K$.

Im folgenden werden einige Sätze über konvexe Körper mittels Approximation durch Polytope bewiesen. Um das zu ermöglichen, brauchen wir einen passenden Begriff von Distanz zwischen konvexen Körper.

Definition 2.1.3 *Seien K und L konvexe Körper. Definiere die Hausdorff-Distanz zwischen K und L als*

$$\mathrm{hdist}(K, L) := \min\{r \in \mathbb{R} |\, L \subset K + rB,\ K \subset L + rB\}$$

Bemerke, dass $K + rB$ die Parallelmenge von K ist, d. h. die Menge aller Punkte, deren Abstand von K kleiner oder gleich r ist. Das erlaubt uns die Hausdorff-Distanz geometrisch folgendermaßen zu interpretieren:

Proposition 2.1.1 *Die Hausdorff-Distanz zwischen K und L ist genau dann kleiner oder gleich r, wenn*

$$\begin{array}{lll} \mathrm{dist}(x, L) \leq r & \textit{für alle } x \in K & \textit{und} \\ \mathrm{dist}(y, K) \leq r & \textit{für alle } y \in L & \textit{gilt.} \end{array}$$

Proposition 2.1.2 *Die Menge aller konvexen Körper ist ein metrischer Raum bezüglich der Hausdorff-Distanz. D. h., die Hausdorff-Distanz hat folgende Eigenschaften:*

1) $\mathrm{hdist}(K, L) \geq 0$, *außerdem gilt* $\mathrm{hdist}(K, L) = 0$ *genau dann, wenn* $K = L$ *gilt;*

2) $\mathrm{hdist}(K, L) = \mathrm{hdist}(L, K)$*;*

3) $\mathrm{hdist}(K, L) + \mathrm{hdist}(L, M) \geq \mathrm{hdist}(K, M)$.

Satz 2.1.1 *Für jeden konvexen Körper K und jedes $r > 0$ gibt es ein Polytop P, so dass* $\mathrm{hdist}(K, P) < r$ *gilt.*

Beweis Betrachte ein Gitter mit der Kantenlänge δ. Sei W die Vereinigung aller Würfel des Gitters, die mindestens einen Punkt mit K gemeinsam haben. Setze $P_\delta := \mathrm{conv}(W)$. Offenbar ist P_δ ein Polytop. Man hat erstens $K \subset P_\delta$. Andererseits, für jeden Punkt $x \in P_\delta$ gilt

$$\mathrm{dist}(x, K) \leq \sqrt{n} \cdot \delta,$$

da x in einem Würfel liegt, der Punkte aus K enthält, und der größte Abstand zwischen Punkten eines n-dimensionalen Würfels ist $\sqrt{n}$ mal die Kantenlänge. Nimmt man also $\delta = \frac{r}{\sqrt{n}}$, so ist P_δ in $K + rB$ enthalten. □

Die Approximation bezüglich der Hausdorff-Distanz würde uns nur in dem Fall nutzen, wenn aus $\mathrm{hdist}(K_i, K) \to 0$ auch $\mathrm{vol}(K_i) \to \mathrm{vol}(K)$ folgte. Und es ist so.

Satz 2.1.2 *Bezüglich der Hausdorff-Distanz ist das Volumen eine stetige Funktion auf der Menge aller konvexer Körper.*

Beweis Es ist also zu zeigen: Für jeden konvexen Körper K und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass falls $\mathrm{hdist}(K, L) < \delta$ für einen konvexen Körper L gilt, dann gilt $|\mathrm{vol}(L) - \mathrm{vol}(K)| < \varepsilon$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) $\dim K < n$

Dann gilt $\mathrm{vol}(K) = 0$. OBdA $\mathrm{aff}(K) \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Sei $W = (K+B) \cap \mathbb{R}^{n-1}$. Dann liegt der konvexe Körper $K + B$ im Zylinder $W \times \mathbb{R}$ über W. Außerdem, für jedes $\delta < 1$ gilt $K + \delta B \subset W \times [-\delta, \delta]$. Folglich, falls $L \subset K + \delta B$, dann gilt $\mathrm{vol}(L) \leq \mathrm{vol}(W \times [-\delta, \delta]) = \mathrm{vol}_{n-1}(W) \cdot 2\delta$. Für genügend kleine δ ist die letzte Zahl kleiner als ε.

2) $\dim K = n$

OBdA $0 \in \mathrm{int}K$ (wenn K und L um den gleichen Vektor parallelverschoben werden, ändern sich weder $\mathrm{hdist}(K, L)$, noch $\mathrm{vol}(K)$ und $\mathrm{vol}(L)$ nicht). Sei $rB \subset K$. Dann aus $\mathrm{hdist}(K, L) < \delta$ folgt

$$L \subset K + \delta B \subset K + \delta \cdot \frac{1}{r} K = \left(1 + \frac{\delta}{r}\right) K$$
$$\text{und somit} \quad \mathrm{vol}(L) \leq \left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^n \mathrm{vol}(K)$$

Andererseits, für $\delta < r$ gilt $(r - \delta)B \subset L$, weil $K \subset L + \delta B$ und $rB \subset K$. Daraus folgt

$$K \subset L + \delta B \subset L + \delta \cdot \frac{1}{r - \delta} L = \left(1 + \frac{\delta}{r - \delta}\right) L$$
$$\text{und somit} \quad \mathrm{vol}(K) \leq \left(1 + \frac{\delta}{r - \delta}\right)^n \mathrm{vol}(L)$$
$$\text{und} \quad \mathrm{vol}(L) \geq \left(1 - \frac{\delta}{r}\right)^n \mathrm{vol}(K)$$

Jetzt ist es einfach zu sehen, dass für genügend kleine δ gilt: $|\mathrm{vol}(L) - \mathrm{vol}(K)| < \varepsilon$. $\square$

Zum Schluss bemerken wir, dass die Hausdorff-Distanz zu einer wohlbekannten Sache wird, wenn die konvexen Körper durch ihre Stützfunktionen betrachtet werden.

Proposition 2.1.3 *Es gilt*

$$\mathrm{hdist}(K, L) = \|s_K - s_L\|_\infty = \sup_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} |s_K(v) - s_L(v)|$$

Beweis Es reicht, das folgende Lemma auf die Mengen $K + rB$, $L + rB$ anzuwenden und dabei die Äquivalenz

$$M \subset N \Longleftrightarrow s_M(v) \le s_N(v) \text{ für alle } v$$

zu beachten. □

Lemma 2.1.1 *Seien $K_1, \dots, K_m$ konvexe Körper, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ nichtnegative Zahlen. Bezeichne mit s_i die Stützfunktion von K_i und mit s die Stützfunktion von $\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_m K_m$. Dann gilt*

$$s = \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_m s_m$$

2.1.3 Satz von Minkowski

Satz 2.1.3 *Das Volumen der linearen Kombination von konvexen Körper ist ein homogenes Polynom des Grades n in den Koeffizienten der Kombination:*

$$\mathrm{vol}(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_m K_m) = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{m} a_{i_1 \dots i_n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n}$$

Die Koeffizienten $a_{i_1 \dots i_n}$ sind also von λ_i, $i = 1, \dots, m$ unabhängig. Sie sind aber durch die obige Formel noch nicht eindeutig definiert. Sie werden eindeutig definiert, wenn man zusätzlich verlangt, dass sie in ihren Indizes symmetrisch sind. Betrachten wir den Beispiel der Kombination von 2 Körpern. Die Formel lautet:

$$\mathrm{vol}(\lambda K + \mu L) = a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu\lambda + d\mu^2$$

Das Polynom auf der rechten Seite ändert sich nicht, wenn wir b durch $b - x$ und c durch $c + x$ ersetzen. Durch die Bedingung $b = c$ werden die Zahlen b und c aber festgelegt.

Definition 2.1.4 *Unter der Zusatzbedingung $a_{i_1 \dots i_n} = a_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_n)}$ für jede Permutation σ heißt die Zahl $a_{i_1 \dots i_n}$ das gemischte Volumen von $K_{i_1}, \dots, K_{i_n}$ und wird mit*

$$\mathrm{vol}(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$$

bezeichnet. [1]

[1] Ein wenig überlegt, sieht man, dass die Wohldefiniertheit der gemischten Volumina bewiesen werden muss: warum hängt eigentlich $\mathrm{vol}(K_1, \dots, K_n)$ von $K_{n+1}, \dots, K_m$ nicht ab? Noch ein wenig überlegt, sieht man, dass es wirklich der Fall ist.

Für den Beweis des Satzes von Minkowski brauchen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.1.2 *Sei $K = \lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_m K_m$. Wenn $F_1, \ldots, F_m$ die zur Richtung v gehörigen Seiten von jeweils $K_1, \ldots, K_m$ sind, dann gilt für die zur selben Richtung v gehörige Seite F von K:*

$$F = \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_m F_m$$

Der Beweis ist einfach und ähnelt einigen früheren. Vergessen Sie aber nicht, dass wir nur lineare Kombinationen mit nichtnegativen Koeffizienten betrachten; sonst gilt das Lemma nicht.

Beweis des Satzes Wir beweisen den Satz zuerst für Polytope und erweitern ihn später mittels Approximation auf allgemeine konvexe Körper. Bezeichne

$$K = \lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_m K_m$$

Wenn ein oder mehrere von K_i parallelverschoben werden, dann wird auch K parallelverschoben. Dabei ändert sich $\operatorname{vol}(K)$ nicht. Deswegen können wir $0 \in K_i$ für alle i annehmen und folglich $0 \in K$. Wenn jetzt $\operatorname{aff}(\cup_i K_i) \neq \mathbb{R}^n$ gilt, dann ist $\operatorname{vol}(K) \equiv 0$ das Polynom mit allen Koeffizienten 0. Sonst gilt $\dim K = n$ für positive λ_i. Wie im ersten Abschnitt, zerlegen wir K in Pyramiden mit der Spitze 0 und mit Facetten von K als Basen. Dann gilt

$$\operatorname{vol}(K) = \frac{1}{n} \sum_F s(v_F) \cdot \operatorname{vol}_{n-1}(F),$$

wobei die Summe über allen Facetten von K erstreckt, und v_F die äußere Einheitsnormale von F ist. Wegen der Lemmas 2.1.1 und 2.1.2 gilt dann:

$$\operatorname{vol}(K) = \frac{1}{n} \sum_F (\lambda_1 s_1(v_F) + \cdots + \lambda_m s_m(v_F)) \cdot \operatorname{vol}_{n-1}(\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_m F_m),$$

wobei F_i die zur Richtung v_F gehörige Seite von K_i ist. Insbesondere liegen alle Seiten F_i in zu v_F orthogonalen Hyperebenen. Wenn wir sie alle in eine Hyperebene verschieben, dann ändert sich das Volumen ihrer linearen Kombination F nicht, und das erlaubt uns die Induktionsannahme anzuwenden. Nämlich, das Volumen $\operatorname{vol}_{n-1}(\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_m F_m)$ ist ein homogenes Polynom des Grades $n-1$ in $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Dann ist aber $\operatorname{vol}(K)$ ein solches Polynom des Grades n. Somit ist der Satz von Minkowski für Polytope bewiesen, und die gemischte Volumina von Polytopen definiert.

Nun müssen wir den Satz von Minkowski für beliebige konvexe Körper beweisen. Das geht über die Approximationsätze 7.1 und 7.2.

Seien $K_1, \ldots, K_m$ beliebige konvexe Körper. Dann existiert nach dem Satz 7.1 für jedes i eine Folge $(K_i^j)_{j=1}^{\infty}$ von Polytopen, so dass

$$K_i = \lim_{j \to \infty} K_i^j$$

(das ist eine andere Schreibweise für $\lim_{j\to\infty} \operatorname{hdist}(K_i, K_i^j) = 0$). Daraus folgt insbesondere:

$$\lim_{j \to \infty} (\lambda_1 K_1^j + \cdots + \lambda_m K_m^j) = \lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_m K_m$$

Bezeichnen wir:

$$\begin{aligned} f^j(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) :=&\ \operatorname{vol}(\lambda_1 K_1^j + \cdots + \lambda_m K_m^j), \quad j \in \mathbb{N} \\ f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) :=&\ \operatorname{vol}(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_m K_m) \end{aligned}$$

Dabei sind f, f^j Abbildungen von $[0, +\infty[^m$ nach $\mathbb{R}$. Es wurde bewiesen, dass jede f^j ein homogenes Polynom n-ten Grades ist. Außerdem, aus dem Satz 7.2 folgt, dass die Funktionen f^j punktweise gegen f konvergieren. Nun reicht es jetzt, das folgende Lemma anzuwenden.

Lemma 2.1.3 *Der punktweise Limes auf $[0, +\infty[^m$ von Polynomen des Grades n in m Variablen ist ein Polynom des Grades nicht größer als n. Die Koeffizienten der Polynome der Folge konvergieren gegen den Koeffizienten vom Limes.*

Beachten Sie, das die Konstanz des Grades eine wesentliche Bedingung ist. Sonst kann man für jede stetige Funktion eine gegen sie punktweise konvergierende Folge von Polynomen finden. Das Lemma kann durch die Lagrange-Interpolation bewiesen werden. □

Aufgaben

1) (a) Seien K und L Recthecke in $\mathbb{R}^2$ mit zu Koordinatenachsen parallelen Seiten. Bestimmen Sie die gemischten Volumina $\operatorname{vol}(K, K)$, $\operatorname{vol}(K, L)$ und $\operatorname{vol}(L, L)$.

(b) Sei K ein Vieleck, I eine Strecke in $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die gemischten Volumina $\mathrm{vol}(K, K)$, $\mathrm{vol}(K, I)$, $\mathrm{vol}(I, I)$.

2) Seien $P = \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_m\}$, $Q = \mathrm{conv}\{y_1, \ldots, y_l\}$ Polytope. Zeigen Sie:

$$\mathrm{hdist}(P, Q) \leq \mathrm{hdist}(\{x_1, \ldots, x_m\}, \{y_1, \ldots, y_l\})$$

Ferner, geben Sie einen Beispiel, wo

$$\mathrm{hdist}(P, Q) < \mathrm{hdist}(\{x_1, \ldots, x_m\}, \{y_1, \ldots, y_l\}) \text{ gilt.}$$

3) (a) Zeigen Sie: Für jeden konvexen Körper K und jedes $\delta > 0$ existiert ein Polytop P, so dass alle Ecken von P auf dem Rand von K liegen und $\mathrm{hdist}(K, P) < \delta$ gilt.

(b) Es gibt ein approximierendes Polytop P mit $\mathrm{hdist}(K, P) < \delta$ und Anzahl der Ecken $< C\frac{\mathrm{area}(\partial K)}{\delta^{n-1}}$, wobei C nur von n abhängt.

4) Sei $0 \in \mathrm{int}K$. Zeigen Sie: $K_i \to K$ in der Hausdorff-Metrik genau dann, wenn d_i gleichmäßig zu d konvergiert, wobei d die Distanzfunktion von K, d_i die Distanzfunktion von K_i ist.

5) Sei P ein Polytop mit Facetten $F_1, \ldots F_m$. Sei v_i der äußere Normaleneinheitsvektor von F_i, $i = 1, \ldots, m$. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{vol}_{n-1}(F_i) \cdot v_i = 0$$

Hinweise

3a) Kann topologisch bewiesen werden, durch Auswahl aus einer gewissen Überdeckung einer endlichen.
3b) Um ein approximierendes Polytop explizit zu konstruieren, erinnern sie an der Abbildung "der nächste Punkt", die eigentlich die Abstände nicht vergrößert. Die gewünschte Abschätzung der Anzahl der Ecken können wir, wahrscheinlich, noch nicht beweisen, aber sie muss plausibel sein.
5) Neben dem strengen Beweis gibt es ein physikalisches Argument.

2.2 Gemischte Volumina: Eigenschaften

Also, für je n konvexen Körper $K_1, \dots, K_n$ haben wir eine Größe $\mathrm{vol}(K_1, \dots, K_n)$ definiert. So gesehen, ist das gemischte Volumen eine Funktion von n Argumenten.

Satz 2.2.1 *Das gemischte Volumen hat die folgenden Eigenschaften:*

1) *falls alle n Argumenten einem Körper gleich sind, dann ist es dem üblichen Volumen dieses Körpers gleich:*

$$\mathrm{vol}(K, \dots, K) = \mathrm{vol}(K);$$

2) *es ist multilinear bezüglich nichtnegativen Linearkombinationen:*

$$\mathrm{vol}(\mu L_1 + \mu' L_1', K_2, \dots, K_n) = \mu \mathrm{vol}(L_1, K_2, \dots, K_n) + \mu' \mathrm{vol}(L_1', K_2, \dots, K_n);$$

3) *es ist stetig bezüglich der Hausdorff-Distanz;*

4) *es ist monoton bezüglich der Inklusion, d. h. für $K_1 \subset K_1'$ gilt:*

$$\mathrm{vol}(K_1, K_2, \dots, K_n) \leq \mathrm{vol}(K_1', K_2 \dots, K_n);$$

5) *es ist nichtnegativ:*

$$\mathrm{vol}(K_1, \dots, K_n) \geq 0.$$

Beweis

1) Für die "Linearkombination" aus einem einzigen Summand λK nimmt der Satz von Minkowski den Gestalt $\mathrm{vol}(\lambda K) = \lambda^n \mathrm{vol}(K, \dots, K)$. Andererseits, wir wissen, dass $\mathrm{vol}(\lambda K) = \lambda^n \mathrm{vol}(K)$ gilt. Daher die Behauptung.

2) Man beweist es durch den Vergleich von Koeffizienten von Polynomen. Hauptsache, sich in vielen Variablen nicht zu verirren.

3) Fast dasselbe haben wir im zweiten Teil des Beweises des Satzes von Minkowski gezeigt. Eine kurze Wiederholung: das Polynom $\mathrm{vol}(\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_n K_n)$ in Variablen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hängt stetig von $K_1, \dots, K_n$ ab. Aber Koeffizienten eines Polynoms hängen stetig vom Polynom ab.

5) Folgt aus 4): $\mathrm{vol}(K_1, \dots, K_n) \geq \mathrm{vol}(\{x_1\}, \dots, \{x_n\})$, wobei $x_i \in K_i$. Und offenbar $\mathrm{vol}(\{x_1\}, \dots, \{x_n\}) = 0$.

4) bereitet uns die größten Schwierigkeiten vor. Als Belohnung aber werden wir auf dem Weg zum Beweis eine Formel bekommen, die den Namen von gemischten Volumina rechtfertigt.

Lemma 2.2.1 *Sei K ein konvexer Körper und L ein konvexes Polytop. Dann gilt:*

$$\mathrm{vol}(K, L, \dots, L) = \frac{1}{n} \sum_{F_L \text{ Facette von } L} s_K(v) \cdot \mathrm{vol}_{n-1}(F_L),$$

wobei v jeweils die äußere Einheitsnormale zu F_L ist.

Bei $K = L$ kriegt man die übliche Formel für das Volumen eines Polytops (unter Beachtung von $\mathrm{vol}(K, \dots, K) = \mathrm{vol}(K)$).
Beweis des Lemmas Im Fall der linearen Kombination $\lambda K + \mu L$ besagt der Satz von Minkowski folgendes:

$$\mathrm{vol}(\lambda K + \mu L) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{vol}(\underbrace{K, \dots, K}_{k}, L, \dots, L) \lambda^k \mu^{n-k}$$

Durch Einsetzen $\mu = 1$ erhalten wir ein Polynom in λ mit dem linearen Teil $\mathrm{vol}(K, L, \dots, L)\lambda + \mathrm{vol}(L, L, \dots, L)$. Somit gilt:

$$\mathrm{vol}(K, L, \dots, L) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathrm{vol}(L + \lambda K) - \mathrm{vol}(L)}{\lambda}$$

und wir müssen das Volumen von $L + \lambda K$ näher abschätzen. Der Plan ist folgender: aus der Menge $(L + \lambda K) \setminus L$ Prismen mit Basen auf Facetten von L auszuschneiden und das Volumen des Rests als $O(\lambda^2)$ abzuschätzen.

OBdA gilt $0 \in K$. Für jede Facette F von L wähle einen Punkt $x_F \in K$ auf der zu F parallelen Seite, d. h. x_F liegt auf der Stützebene von K mit der Stützrichtung v_F und hat somit die Eigenschaft $\langle x_F, v_F \rangle = s_K(v_F)$, wobei v_F die äußere Einheitsnormale zu F ist. Da $[0, x_F] \subset K$ ist, so ist das Prisma $P_F := F + [0, \lambda x_F]$ in $L + \lambda K$ enthalten. Dabei hat es die Höhe $\lambda s_K(v_F)$ und somit gilt

$$\mathrm{vol}(P_F) = \lambda \cdot s_K(v_F) \cdot \mathrm{vol}_{n-1}(F)$$

Jetzt muss man bemerken, dass der Durchschnitt von Prismen P_F und P_G für unterschiedliche Facetten F und G höchstens $(n-1)$-dimensional ist. Daraus folgt

$$\mathrm{vol}(L + \lambda K) \geq \mathrm{vol}(L) + \lambda \sum_F s_K(v_F) \cdot \mathrm{vol}_{n-1}(F)$$

Jetzt behaupten wir, dass alle Punkte, die außerhalb von L und Prismen liegen, nicht weit vom $(n-2)$-dimensionalen Gerüst entfernt sind. Nämlich, bezeichne mit $L^{(n-2)}$ die Vereinigung aller $(n-2)$-dimensionalen Seiten von L. Dann gilt

Unterlemma 2.2.1.1

$$L + \lambda K \subset L \cup \left(\bigcup_F P_F\right) \cup \left(L^{(n-2)} + \lambda K\right)$$

Das Volumen von $L^{(n-2)} + \lambda K$ ist nicht schwer abzuschätzen. Es gibt ein r, so dass $K \subset rB$ gilt. Sei jetzt G eine $(n-2)$-dimensionale Seite von L. Dann gilt $G + \lambda K \subset G + \lambda \cdot rB$ und folglich $\mathrm{vol}(G + \lambda K) \leq C\lambda^2$. Insgesamt

$$\mathrm{vol}(L + \lambda K) = \mathrm{vol}(L) + \lambda \sum_F s_K(v_F) \cdot \mathrm{vol}_{n-1}(F) + O(\lambda^2),$$

woraus folgt die Behauptung. □Lemma

Korollar 2.2.1 *Sei K ein konvexer Körper und $L_1, \ldots, L_{n-1}$ konvexe Polytope. Dann gilt:*

$$\mathrm{vol}(K, L_1, \ldots, L_{n-1}) = \frac{1}{n} \sum_v s_K(v) \cdot \mathrm{vol}_{n-1}(F_1, \ldots, F_{n-1}),$$

wobei jetzt die Summierung über alle äußeren Einheitsnormalen v zu Facetten von der Minkowskisumme $L_1 + \cdots + L_{n-1}$ erstreckt; nämlich, F_i ist die Seite von L_i mit der Stützrichtung v, und $F_1 + \cdots + F_{n-1}$ ist eine Facette von $L_1 + \cdots + L_{n-1}$.

Beweis des Korollars Wenden wir das obige Lemma auf die Linearkombination $L = \lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_{n-1} L_{n-1}$ an. Jede Facette F_L von L schreibt sich als eine Linearkombination $\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_{n-1} F_{n-1}$, wobei F_i die Seite von L_i in der selben Stützrichtung wie F ist. Dann ergibt sich

$$\mathrm{vol}(K, L, \ldots, L) = \frac{1}{n} \sum_v s_K(v) \cdot \mathrm{vol}_{n-1}(\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_{n-1} F_{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_v s_K(v) \left(\sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}} \mathrm{vol}(F_{i_1}, \ldots, F_{i_{n-1}}) \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-1}} \right)$$

Andererseits, iterierte Anwendung der oben bewiesenen Eigenschaft 2. ergibt

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(K, L, \ldots, L) = \mathrm{vol}(K, \lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_{n-1} L_{n-1}, \ldots, \lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_{n-1} L_{n-1}) = \\ = \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-1}} \mathrm{vol}(K, L_{i_1}, \ldots, L_{i_{n-1}})\end{aligned}$$

Mit dem Vergleich von Koeffizienten bei dem Monom $\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}$ in zweien Ausdrücken für $\mathrm{vol}(K, L, \ldots, L)$ folgt die Behauptung. $\square$Korollar

Mit Hilfe des Korollars beweisen wir jetzt die Eigenschaft 4. Wir führen Induktion nach n.

Durch die Parallelverschiebung erreicht man $0 \in K_1 \subset K_1'$. Dann gilt

$$0 \leq s_{K_1}(v) \leq s_{K_1'}(v)$$

für alle v. Setzen wir in der Formel des Korollars $K = K_1$ bzw. $K = K_1'$ ein. Angenommen, dass die Eigenschaft 4. für konvexe Körper in $\mathbb{R}^{n-1}$ gilt, folgt daraus auch die Eigenschaft 5. (Nichtnegativität) für diese Dimension. Somit gilt $\mathrm{vol}_{n-1}(F_1, \ldots, F_{n-1}) \geq 0$ in der Formel des Korollars. Dann folgt aus $s_{K_1} \leq s_{K_1'}$ die Ungleichung

$$\mathrm{vol}(K_1, L_1, \ldots, L_{n-1}) \leq \mathrm{vol}(K_1', L_1, \ldots, L_{n-1})$$

für alle Polytope $L_1, \ldots, L_{n-1}$. Für allgemeine konvexe Körper an deren Stelle folgt die Ungleichung durch Übergang zum Limes dank der Stetigkeit der gemischten Volumina (die bereits bewiesene Eigenschaft 3.).

Als Basis der Induktion genügt es $n = 1$ zu nehmen. Dann sind K_1 und K_1' beide Strecken und die Behauptung ist klar. $\square$Satz

Aufgaben

1) Seien $K \subset \mathbb{R}^k$, $L \subset \mathbb{R}^l$ konvexe Körper. Bestimmen Sie die gemischten Volumina von K und L als Teilmengen von $\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l$.

2) Bei festen konvexen Körpern $K_1, \ldots, K_{n-1}$ bezeichne

$$f(v) = \mathrm{vol}(K_1, \ldots, K_{n-1}, [0, v])$$

für $v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Funktion f positiv homogen und konvex nach unten ist.

3) Seien $a_i, b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}([a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]) = \frac{1}{n!}|\det(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)| = \\ = \mathrm{vol}(\mathrm{conv}\{0, b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n\})\end{aligned}$$

4) Das gemischte Volumen ist zwar monoton (Eigenschaft 4., Satz 8.1), aber nicht streng monoton. Geben Sie einen Beispiel, wo

$$\mathrm{vol}(K_1, K_2, \dots, K_n) = \mathrm{vol}(K_1', K_2, \dots, K_n)$$

gilt, aber $K_1 \subsetneq K_1'$ ist.

5) (a) Beweisen Sie die folgende "Inklusion-Exclusion" Formel:

$$\mathrm{vol}(K_1, \dots, K_n) = \frac{1}{n!} \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} \left((-1)^{n-|I|} \mathrm{vol}(\sum_{i \in I} K_i) \right),$$

wobei das zweite Summenzeichen die Minkowskisumme bedeutet.

(b) Benutzen Sie die obige Gleichung, um den Satz von Minkowski aus seinem speziellen Fall für Polytope abzuleiten.

Hinweise

4) Schauen Sie das Ergebnis der Aufgabe 1b), Blatt 7 an.

2.3 Steiner-Formel und Quermaßintegrale

2.3.1 Steiner-Formel

Das Volumen vom Parallelkörper $K + \rho B$ kann man durch Spezifizierung des Satzes von Minkowski als ein Polynom in ρ darstellen. Diese Darstellung wurde bereits in 1840 von Steiner entdeckt. Unser Ziel in diesem Kapitel ist es, die Koeffizienten des sich ergebenden Polynoms geometrisch zu deuten.

Satz 2.3.1 (Steiner) *Das Volumen vom Parallelkörper im Abstand ρ ist ein Polynom des Grades n in der Variablen ρ:*

$$\mathrm{vol}(K + \rho B) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} W_k(K)\rho^k$$

Hier ist $W_k(K)$, wie wir wissen, einem gemischten Volumen gleich:

$$W_k(K) := \mathrm{vol}(K, \ldots, K, \underbrace{B, \ldots, B}_{k})$$

Die Größe $W_k(K)$ heißt das k-te Quermaßintegral von K. Diesen Namen wird der Satz 2.3.2 rechtfertigen.

Für weiteres brauchen wir Bezeichnungen für die folgenden Konstanten:

$$\begin{array}{ll} \kappa_n := \mathrm{vol}(B) & \text{das Volumen der } n\text{-Kugel} \\ \sigma_{n-1} := \mathrm{area}(\partial B) & \text{der Flächeninhalt der } (n-1)\text{-Sphäre} \end{array}$$

Es ist nicht schwer, eine Beziehung zwischen κ_n und σ_{n-1} zu entdecken:

$$\kappa_n = \lim_{P \to B} \mathrm{vol}(P) = \lim_{P \to B} \sum_{F \in \mathcal{F}^{n-1}(P)} \frac{1}{n} h_i \mathrm{vol}_{n-1}(F) = \lim_{P \to B} \frac{1}{n} \mathrm{area}(\partial B) = \frac{1}{n} \sigma_{n-1}$$

Bemerkung

$$\kappa_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \begin{cases} \frac{\pi^k}{k!} & \text{für } n = 2k \\ \frac{\pi^k 2^{2k+1} k!}{(2k+1)!} & \text{für } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Proposition 2.3.1 *Es gilt*

$$\begin{aligned} W_0(K) &= \mathrm{vol}(K) \\ W_1(K) &= \frac{1}{n} \mathrm{area}(\partial K) \\ W_n(K) &= \kappa_n \end{aligned}$$

Ist K ein 3-dimensionales Polytop, so gilt:

$$W_2(K) = \frac{1}{3} \sum_{F \in \mathcal{F}^1(K)} \gamma(F) \cdot |F|,$$

wobei $\gamma(F)$ der Winkel zwischen den Einheitsnormalen zweier Kante F enthaltenden Facetten ist (die äußere Flächenwinkel bei F).

Beweis Tatsächlich,

$$W_0(K) = \mathrm{vol}(K, \ldots, K) = \mathrm{vol}(K)$$

und

$$W_n(K) = \mathrm{vol}(B, \ldots, B) = \mathrm{vol}(B) = \kappa_n$$

Ferner, für K ein Polytop gilt

$$W_1(K) = \mathrm{vol}(K, \ldots, K, B) = \frac{1}{n} \sum_{F \in \mathcal{F}^{n-1}(K)} s_B(v) \cdot \mathrm{vol}_{n-1}(F)$$

wegen des Lemmas 8.1. Da $s_B(v) = 1$ für alle $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, hieraus folgt die zweite Gleichung der Proposition für K ein Polytop. Der allgemeine Fall gilt wegen der Stetigkeit von W_1 und vom Flächeninhalt.[2]

Nun zum W_2 in $\mathbb{R}^3$. Das lässt sich gut veranschaulichen: der Parallelkörper $K + \rho B$ kann in folgende Teile aufgeteilt werden: 1)K selbst, 2)Prismen der Höhe ρ über den Facetten von K, 3)Zylindersektoren, deren Achsen Kanten von K und deren Sektorwinkel zugehörigen äußeren Flächenwinkel sind, 4)Kugelsektoren mit Zentren in Ecken von K. Wir interessieren uns jeztz für das quadratischen Glied von

$$\mathrm{vol}(K + \rho B) = W_0(K) + 3W_1(K)\rho + 3W_2(K)\rho^2 + W_3(K)\rho^3$$

und das ist, wie man sofort sieht, das gesamte Volumen der Zylindersektoren. Daraus folgt die Formel der Proposition. Die Glieder anderer Ordnung entsprechen den anderen Gruppen von Teilen. □

Bemerkungen 1) Die obige Formel für W_2 kann auf anderen Dimensionen verallgemeinert werden. Wenn man den äußeren Winkel $\gamma(F)$ vom Polytop K an jeder seiner Seite F passend definiert, dann gilt:

$$\binom{n}{k} W_k(K) = \sum_{F \in \mathcal{F}^{n-k}} \gamma(F) \cdot \mathrm{vol}_{n-k}(F)$$

2) Falls K ein konvexer Körper mit glattem Rand ist, dann sind die Maßzahlen W_k für $k > 0$ gewisse Krümmungsintegrale über die Fläche ∂K:

$$W_k(K) = \frac{1}{n\binom{n-1}{k-1}} \int_{\partial K} H_{k-1} d\sigma \quad \text{für } k > 0$$

[2]Der Beweis des Lemmas 8.1 ist etwas skizzenhaft, aber kann in diesem speziellen Fall vereinfacht werden. Ich emphehle, die Details dieses Falles auszuführen.

Hier ist H_{k-1} die $(k-1)$-te elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungen von ∂K, und $d\sigma$ bezeichnet das Oberflächenelement. Im Falle $n = k = 3$ hat man die Gauß-Bonnet Formel für eine konvexe Fläche in $\mathbb{R}^3$.

Aus der obigen Proposition sieht man, dass die Quermaßintegrale bezüglich der Dimension des umgebenden Raumes nicht invariant sind. In der Tat misst W_k in einem gewissen Sinne den $(n-k)$-dimensionalen Inhalt von K, wie man ebenfalls an den ersten drei Gleichheiten der Proposition sieht. Also muss man bei der Dimensionsänderung auch den Index k ändern, um einen gerechten Vergleich zu machen. Sei $K \subset \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Bezeichne min $W_{k-1}^{n-1}(K)$ das $(k-1)$-te Quermaßintegral von K bezüglich $\mathbb{R}^{n-1}$. Dann ist $W_{k-1}^{n-1}(K)$ zu $W_k(K)$ proportional:

$$W_k(K) = \frac{k}{n} \frac{\kappa_k}{\kappa_{k-1}} W_{k-1}^{n-1}(K)$$

(siehe Leichtweiß, Konvexe Mengen, Bemerkung 16.2).

Es gibt eine andere verbreitete Schreibweise für die Steiner-Formel:

$$\operatorname{vol}(K + \rho B) = \sum_{k=0}^{n} \kappa_{n-k} V_k(K) \rho^{n-k}$$

Die Zahlen $V_k(K)$ heißen *innere Volumina* von K und sind mit Quermaßintegralen wie folgt verbunden:

$$V_k(K) = \frac{\binom{n}{k}}{\kappa_{n-k}} W_{n-k}(K)$$

Die inneren Volumina sind von der Dimension des umgebenden Raumes unabhängig. Das folgt aus der Formel

$$V_k(K) = \sum_{F \in \mathcal{F}^k} \frac{\gamma(F)}{\kappa_{n-k}} \cdot \operatorname{vol}_k(F),$$

da die Größe $\frac{\gamma(F)}{\kappa_{n-k}}$ der normierte Winkel von K bei F ist, so dass der Vollwinkel stets gleich 1 ist, unabhängig vom seinen Dimension.

2.3.2 Quermaße: Formulierung des Hauptsatzes

Definition 2.3.1 *Sei ξ ein k-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Bezeichnen wir mit $\operatorname{pr}_\xi K$ das Bild von K unter der orthogonalen Projektion*

$\mathrm{pr}_\xi : \mathbb{R}^n \to \xi^\perp$ *entlang* ξ. *Die Größe*

$$\mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{pr}_\xi K)$$

heißt die $(n-k)$*-dimensionale Quermaß von* K *in der Richtung* ξ.

Z. B., für $n = 3, k = 1$ ist pr_ξ die orthogonale Projektion auf eine Ebene, und die entsprechende Quermaß von K ist der Flächeninhalt seines "Schattens". Die Menge aller k-dimensionalen Untervektorräumen eines Vektorraumes V heißt *Grassmanian* und wird bezeichnet mit $\mathbb{G}\mathrm{r}_k(V)$.

Das folgende elegante Ergebnis ist der Hauptsatz dieses Kapitels.

Satz 2.3.2 *Die Zahl* $W_k(K)$ *ist bis auf einem nur von* n *und* k *abhängenden Faktor dem Integralmittelwert aller* $(n-k)$*-dimensionalen Quermaßen gleich:*

$$W_k(K) = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-k}} \int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_k(\mathbb{R}^n)} \mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{pr}_\xi K) d\xi$$

Gemeint ist hier Integration bezüglich dem drehungsinvarianten normierten Maß auf $\mathbb{G}\mathrm{r}_k(\mathbb{R}^n)$.

Der Beweis besteht aus zwei Teilen: aus dem Spezialfall $k = 1$, der die Formel von Cauchy für den Flächeninhalt darstellt, und aus der Rekursion von Kubota. Bevor wir den Beweis anfangen, wollen wir die Aussage des Satzes für einige speziellen Werte von k erläutern.

1) $k = 0$ Wie wir wissen, gilt $W_0(K) = \mathrm{vol}(K)$. Man überzeugt sich leicht, dass auf der rechten Seite der Gleichheit des Satzes ebenfalls das Volumen von K steht. (Man integriert über eine einpunktige Menge.)

2) $k = n$ Man hat wiederum nur einen Untervektorraum der entsprechenden Dimension, nämlich, $\mathbb{R}^n$ selbst. Das Bild der Projektion besteht aus dem Nullpunkt, und sein 0-dimensionales Volumen ist 1 nach der Definition. Da $W_n(K) = \kappa_n$, die Gültigkeit des Satzes ist auch in diesem Fall klar.

3) $k = n - 1$ Die Länge der orthogonalen Projektion von K entlang einer Hyperebene ξ heißt die Breite von K in der Richtung $\xi^\perp$. Sie ist dem Abstand zwischen zweien der Hyperebene ξ parallelen Stützebenen von K gleich. (Siehe auch Aufgabe 3.4. Gleichdicke heißen auch Körper konstanter Breite.) Das Integralmittelwert der Breiten in allen Richtungen heißt die *mittlere Breite* $b(K)$ von K. Der Satz besagt also, dass das Koeffizient bei ρ in der Steiner-Formel zur mittleren Breite proportional ist.

2.3.3 Cauchy-Formel

Aus Proposition 2.3.1 wissen wir, dass das erste Quermaßintegral W_1 zum Flächeninhalt des Randes proportional ist. Also muss der Satz 2.3.2 im Falle $k = 1$ den Flächeninhalt des Randes von K mit dem Mittelwert der Inhalte der Projektionen von K auf Hyperebenen verbinden. Die entsprechende Gleichheit wurde von Cauchy für $n = 2$ und $n = 3$ bewiesen.

Satz 2.3.3 (Cauchy)

$$\mathrm{area}(\partial K) = \frac{1}{\kappa_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}u} K) du$$

Beweis Sei zuerst K ein Polytop. Bemerke, dass die Menge $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}u} K$ zweifach von Mengen $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}u} F$, $F \in \mathcal{F}^{n-1}(K)$, bedeckt wird. Ferner, das $(n-1)$-dimensionale Volumen von F wird bei der orthogonalen Projektion auf $u^\perp$ mit dem Faktor $|\langle u, v_F \rangle|$ multipliziert, wobei v_F die Einheitsnormale zu F ist. Daraus folgt:

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}u} K) = \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}^{n-1}(K)} \mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}u} F) = \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}^{n-1}(K)} |\langle u, v_F \rangle| \mathrm{vol}_{n-1}(F)$$

Folglich,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}u} K) du = \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{F}^{n-1}(K)} \left(\mathrm{vol}_{n-1}(F) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v_F \rangle| du \right)$$

Nun, der Wert des letzten Integrals hängt vom Vektor v_F nicht ab. Bezeichnen wir ihn mit C_n. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}u} K) du = \frac{1}{2} C_n \mathrm{area}(\partial K)$$

für alle Polytope K. Aus Stetigkeitsgründen gilt dasselbe für alle konvexe Körper. Es bleibt also C_n zu berechnen. Das kann durch Spezifizierung von K gemacht werden. Setze $K = B$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2} C_n \mathrm{area}(\partial B) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}u} B) du = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \kappa_{n-1} du = \kappa_{n-1} \mathrm{area}(\mathbb{S}^{n-1})$$

Folglich, $C_n = 2\kappa_{n-1}$. Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Jetzt wollen wir zeigen, dass die Cauchy-Formel einen speziellen Fall des Satzes 2.3.2 darstellt. Wir behaupten dafür:

$$\int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_1(\mathbb{R}^n)} \mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{pr}_\xi K) d\xi = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}u} K) du$$

In der Tat, betrachten wir die Abbildung $\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{G}\mathrm{r}_1(\mathbb{R}^n),\ u \mapsto \mathbb{R}u$. Sie erzeugt aus dem üblichen Maß auf $\mathbb{S}^{n-1}$ ein drehungsinvariantes Maß auf $\mathbb{G}\mathrm{r}_1(\mathbb{R}^n)$. Aber so ein Maß ist bis auf einem konstanten Faktor eindeutig, also zum unseren Maß auf $\mathbb{G}\mathrm{r}_1(\mathbb{R}^n)$ proportional. Deswegen stimmen die Integrale $\int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_1(\mathbb{R}^n)} f(\xi) d\xi$ und $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\mathbb{R}u) du$ bis auf einem Faktor für jede Funktion f überein. Dieses Faktor ist leicht zu finden: Da das Maß auf $\mathbb{G}\mathrm{r}_1(\mathbb{R}^n)$ normiert ist, muß man das entsprechende Integral über die Sphäre durch das Maß der Sphäre teilen.

Dann gilt:

$$W_1(K) = \frac{1}{n}\mathrm{area}(\partial K) = \frac{1}{n\kappa_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}u} K) du =$$
$$= \frac{\sigma_{n-1}}{n\kappa_{n-1}} \int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_1(\mathbb{R}^n)} \mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{pr}_\xi K) d\xi = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-1}} \int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_1(\mathbb{R}^n)} \mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{pr}_\xi K) d\xi,$$

wobei die letzte Gleichung aus der Beziehung zwischen den Inhalten der $(n-1)$-Sphäre und n-Kugel (siehe Anfang der Vorlesung) folgt.

2.3.4 Kubota-Rekursion und Beweis des Hauptsatzes

Wenden wir die Cauchy-Formel auf den Parallelkörper von K an. Auf der rechten Seite werden Volumina von Projektionen des Parallelkörpers entstehen. Es ist klar, dass die Projektion des Parallelkörpers der Parallelkörper der Projektion ist:

$$\mathrm{pr}_\xi(K + \rho B) = \mathrm{pr}_\xi K + \rho B^{\xi^\perp},$$

wobei $B^{\xi^\perp}$ die Einheitskugel im Raum $\xi^\perp$ ist. Deswegen gilt nach der Steiner-Formel:

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\mathrm{pr}_\xi(K + \rho B)) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} W_k^{n-1}(\mathrm{pr}_\xi K)\rho^k,$$

wobei W_k^{n-1} das k-te Quermaßintegral im $(n-1)$-dimensionalen euklidischen Raum bezeichnet. Durch Einsetzen in Cauchy-Formel erhalten wir nun:

$$W_1(K+\rho B) = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \rho^k \int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_1(\mathbb{R}^n)} W_k^{n-1}(\mathrm{pr}_\xi K) du$$

Andererseits,

$$W_1(K+\rho B) = \mathrm{vol}(K+\rho B, \dots, K+\rho B, B) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} W_{k+1}(K) \rho^k$$

Durch Koeffizientenvergleich bei ρ^{k-1} auf den rechten Seiten zweier letzten Formeln ergibt sich daraus

Proposition 2.3.2 (Kubota) *Das k-te Quermaßintegral $W_k(K)$ ist bis auf einem nur von n abhängenden Faktor dem Integralmittelwert der $(k-1)$-ten Quermaßintegralen der Orthogonalprojektionen von K auf alle $(n-1)$-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$ gleich:*

$$W_k(K) = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-1}} \int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_1(\mathbb{R}^n)} W_{k-1}^{n-1}(\mathrm{pr}_\xi K) d\xi$$

Dabei bezieht sich das Quermaßintegral W_{k-1}^{n-1} jeweils auf den $(n-1)$-dimensionalen Raum $\xi^\perp$.

Unter Anwendung von Kubota-Rekursion kann man den Satz 9.2 durch Induktion nach k beweisen.

Für $k = 1$ ist der Satz 9.2 zum Satz 9.3 äquivalent. Nach der Induktionsannahme ist für jedes $\xi \in \mathbb{G}\mathrm{r}_1(\mathbb{R}^n)$ die Größe $W_{k-1}^{n-1}(\mathrm{pr}_\xi K)$ dem Integralmittelwert der Inhalte von Projektionen des Körpers $\mathrm{pr}_\xi K \subset \xi^\perp$ entlang $(k-1)$-dimensionalen Untervektorräumen $\eta \subset \xi^\perp$ bis auf einem Faktor gleich:

$$W_{k-1}^{n-1}(\mathrm{pr}_\xi K) = \frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_{n-k}} \int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_{k-1}(\xi^\perp)} \mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{pr}_{\xi\oplus\eta} K) d\eta$$

Integration über ξ ergibt:

$$\int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_1(\mathbb{R}^n)} W_{k-1}^{n-1}(\mathrm{pr}_\xi K) = \frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_{n-k}} \int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_1(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_{k-1}(\xi^\perp)} \mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{pr}_{\xi\oplus\eta} K) d\eta \right) d\xi =$$

$$= \frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_{n-k}} \int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_k(\mathbb{R}^n)} \mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{pr}_\zeta K) d\zeta$$

Die letzte Gleichheit kann wie folgt begründet werden: Das obige iterierte Integral kann als Integral über die Menge $\mathcal{M} = \{(\xi, \eta) | \ \xi \in \mathbb{G}\mathrm{r}_1(\mathbb{R}^n),\ \eta \in \mathbb{G}\mathrm{r}_{k-1}(\xi^\perp)\}$ bezüglich des Produktmaßes von normierten drehungsinvarianten Maßen auf Grassmanianen betrachtet werden. Dieses Produktmaß ist gegen Drehungen von $\mathbb{R}^n$ invariant und außerdem normiert ($1 \times 1 = 1$). Betrachten wir die Projektion $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{G}\mathrm{r}_k(\mathbb{R}^n)$, $(\xi, \eta) \mapsto \xi \oplus \eta$. Sie erzeugt auf $\mathbb{G}\mathrm{r}_k(\mathbb{R}^n)$ ein ebenfalls drehungsinvariantes normiertes Maß, also das übliche Maß. Da auf jedem Faser der Projektion φ die zu integrierende Funktion konstant ist, kann man zur Integration über $\mathbb{G}\mathrm{r}_k(\mathbb{R}^n)$ übergehen.

Multiplikation mit $\frac{\kappa_n}{\kappa_{n-1}}$ und Anwendung von Kubota-Rekursion ergibt jetzt die Behauptung des Satzes 9.2.

Aufgaben

1) (a) Man projiziert den Einheitswürfel orthogonal auf eine zufällig gewählte Ebene. Bestimmen Sie den Erwartungswert des Flächeninhaltes der Projektion. Was ist der Wert des Minimums, bzw. Maximums dieses Flächeninhaltes?

   (b) Bestimmen Sie die mittlere Breite des Einheitswürfels.

2) Zeigen Sie: Die mittlere Breite $b(K)$ ist Minkowski-additiv:
$$b(K + L) = b(K) + b(L)$$

3) Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ eine konvexe Menge der konstanten Breite b. Bestimmen Sie den Umfang von K.

4) Zeigen Sie, dass die Quermaßintegrale des Parallelkörpers im Abstand ρ, ähnlich wie sein Volumen, als Polynome in ρ geschrieben werden können:
$$W_k(K + \rho B) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} W_{k+i}(K) \rho^i$$
(Für $k = 0$ hat man die übliche Steiner-Formel.)

5) Im Beweis von Cauchy-Formel wurde gezeigt:
$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\langle u, v \rangle| du = 2\kappa_{n-1} \quad \text{für alle } v \text{ mit } |v| = 1$$
Können Sie diese Gleichheit auf direkte Weise beweisen?

Hinweise

4) Wenden Sie die Steiner-Formel auf den Parallelkörper $K + \rho B + \lambda B$ auf zwei verschiedenen Weisen an.
5) Approximieren Sie die Sphäre mit einem Polytop.

2.4 Andere integralgeometrischen Formeln

2.4.1 Projektionsformeln

Den obigen Beweis des Satzes 9.2 kann man auch so zusammenfassen: wir wenden die Formel aus Proposition 9.2 auf sich selbst an, “bis es nicht weiter geht“. Man kann aber auf einer beliebigen Stelle aufhören, und dann erhält man den folgenden Satz:

Satz 2.4.1 (Allgemeine Projektionsformel) *Der Integralmittelwert der $(k-j)$-ten Quermaßintegralen der Orthogonalprojektionen von K auf alle $(n-j)$-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$ ist dem k-ten Quermaßintegral $W_k(K)$ bis auf einem nur von n und j abhängenden Faktor gleich:*

$$\int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_j(\mathbb{R}^n)} W_{k-j}^{n-j}(\mathrm{pr}_\xi K)d\xi = \frac{\kappa_{n-j}}{\kappa_n} W_k(K)$$

Dabei bezieht sich das Quermaßintegral W_{k-j}^{n-j} jeweils auf den $(n-j)$-dimensionalen Raum $\xi^\perp$.

Die allgemeine Projektionsformel enthält die Cauchy-Formel (bei $j = k = 1$), die Kubota-Rekursion (bei $j = 1$) und den Satz 9.2 über Quermaßintegrale (bei $j = k$) als Spezialfälle. Andere interessante Spezialfälle erhält man z. B. bei $j = k - 1$ oder $k = n - 1$.

2.4.2 Schnittformeln

Oben wurden alle möglichen Projektionen vom Körper K betrachtet. Es existieren, wie erwartet, auch Schnittformeln, wo man alle möglichen Schnitte des Körpers K mit affinen Teilräumen betrachtet. Die Schnittformeln nennt man manchmal auch Crofton-Formeln.

Die erste Crofton-Formel stellt eine Umformulierung des Satzes 9.2 dar. Die grundlegende Idee ist wie folgt: Den Inhalt der Projektion von K entlang einem k-dimensionalen Untervektorraum ξ kann man als das Maß der Menge zu ξ parallelen und den Körper K treffenden affinen Teilräumen auffassen.

Definition 2.4.1 *Bezeichne mit* $\mathrm{Graff}_k(\mathbb{R}^n)$ *die Menge aller* k*-dimensionalen affinen Teilräumen von* $\mathbb{R}^n$*. Sei* μ_k *das bewegungsinvariante Maß auf* $\mathrm{Graff}_k(\mathbb{R}^n)$*, das der folgenden Normierungsbedingung genügt:*

$$\mu_k\{\alpha|\ \alpha \cap B^n \neq \emptyset\} = \kappa_{n-k}$$

Invarianz- und Normierungsbedingungen bestimmen μ_k eindeutig.

Satz 2.4.2 (Erste Crofton-Formel, auch Hadwiger-Formel) *Das Maß der Menge von allen* K *treffenden* k*-dimensionalen affinen Teilräumen ist bis auf einem nur von* n *und* k *abhängenden Faktor dem Quermassintegral* $W_k(K)$ *gleich:*

$$\mu_k\{\alpha|\ \alpha \cap K \neq \emptyset\} = \frac{\kappa_{n-k}}{\kappa_n}\, W_k(K)$$

Für den Beweis benötigen wir die folgende Beschreibung des Masses μ_k.

Proposition 2.4.1 *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \{(\xi, x)|\ \xi \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n),\ x \in \xi^\perp\} & \to & \mathrm{Graff}_k(\mathbb{R}^n) \\ (\xi, x) & \mapsto & x + \xi \end{array}$$

ist bijektiv. Das Maß μ_k *auf* $\mathrm{Graff}_k(\mathbb{R}^n)$ *wird durch das Produktmaß des normierten drehungsinvarianten Maßes auf* $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ *und des* vol_{n-k} *auf* $\xi^\perp$ *erzeugt.*

Beweis Bijektivität ist klar. Es ist auch klar, dass das obige Produktmaß bewegungsinvariant ist. Deswegen reicht es, die Normierungsbedingung für das durch sie erzeugte Maß auf $\mathrm{Graff}_k(\mathbb{R}^n)$ nachzuprüfen. Sei $A \subset \mathrm{Graff}_k(\mathbb{R}^n)$. Betrachten wir für jedes $\xi \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ die Familie von zu ihm parallelen Teilräumen in A:

$$A_\xi := \{\alpha \in A|\ \alpha = x + \xi \text{ für ein } x \in \xi^\perp\}$$

Die Menge A_ξ kann als Teilmenge von $\xi^\perp$ betrachtet werden (nämlich, die Menge der Schnittpunkten von Teilräumen aus A_ξ mit dem Raum $\xi^\perp$). Dann hat A bezüglich des durch das Produktmaß erzeugte Maß den Inhalt

$$\int_{\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)} \mathrm{vol}_{n-k}(A_\xi) d\xi$$

Wenn wir jetzt $A = \{\alpha |\ \alpha \cap B \neq \emptyset\}$ setzen, dann wird A_ξ mit $\mathrm{pr}_\xi B$ identifiziert. Da $\mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{pr}_\xi B) = \kappa_{n-k}$ ist und das Maß auf dem Grassmanian normiert ist, folgt daraus die Gültigkeit der Normierungsbedingung. □
Beweis des Satzes Genauso gilt für einen beliebigen konvexen Körper K:

$$\{\alpha |\ \alpha \cap K \neq \emptyset\}_\xi = \mathrm{pr}_\xi K,$$

und aus dem Produktdarstellung des Maßes μ_k folgt:

$$\mu_k\{\alpha |\ \alpha \cap K \neq \emptyset\} = \int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_k(\mathbb{R}^n)} \mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{pr}_\xi K) d\xi$$

Anwendung des Satzes 9.2 ergibt jetzt unsere Behauptung. □

Wir haben gerade das Maß der Menge aller K treffenden Teilräumen betrachtet. Es entsteht eine natürliche Frage: Wenn ein Teilraum α den Körper K trifft, dann wie groß ist der Durchschnitt? Mit anderen Worten, was ist der Erwartungswert E des k-dimensionalen Volumen des Durchschnitts $\alpha \cap K$ unter der Bedingung, dass dieser nichtleer ist? Es ist klar, dass die Antwort durch die folgende Formel gegeben wird:

$$E = \frac{\int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_k(\mathbb{R}^n)} \mathrm{vol}_k(\alpha \cap K) d\alpha}{\mu_k\{\alpha |\ \alpha \cap K \neq \emptyset\}}$$

Somit müssen wir das im Zähler stehende Integral berechnen.

Satz 2.4.3 (Zweite Crofton-Formel) *Das Integral des k-dimensionalen Volumens des Schnittes von K bezüglich des Masses μ_k ist dem Volumen von K gleich:*

$$\int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_k(\mathbb{R}^n)} \mathrm{vol}_k(\alpha \cap K) d\alpha = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-k}} \mathrm{vol}(K)$$

Somit gilt für den bedingten Erwartungswert des Volumens des Schnittes:

$$E(\mathrm{vol}_k(\alpha \cap K) \mid \alpha \cap K \neq \emptyset) = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-k}} \cdot \frac{\mathrm{vol}(K)}{W_k(K)}$$

Beweis Dank der Proposition 2.4.1 kann man die Integration über $\mathbb{G}\mathrm{raff}_k(\mathbb{R}^n)$ durch die iterierte Integration ersetzen:

$$\int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_k(\mathbb{R}^n)} \mathrm{vol}_k(\alpha \cap K) d\alpha = \int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_k(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{\xi^\perp} \mathrm{vol}_k((x+\xi) \cap K) dx \right) d\xi =$$
$$= \int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_k(\mathbb{R}^n)} \mathrm{vol}(K) d\xi = \mathrm{vol}(K) \quad \square$$

Die erste und die zweite Crofton-Formeln sind nur Speziallfälle des folgenden Satzes.

Satz 2.4.4 (Allgemeine Schnittformel, auch Crofton-Formel) *Das Integral bezüglich des Masses μ_k des j-ten Quermaßintegrals des Schnittes von K ist*

$$\int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_k(\mathbb{R}^n)} W_j^k(\alpha \cap K) d\alpha = \frac{\kappa_k \kappa_{n-j}}{\kappa_{k-j}\kappa_n} W_j(K)$$

Nämlich, die zweite Crofton-Formel bekommt man bei $j = 0$. Für die erste erinnern wir, dass $W_n^n(K) = \kappa_n$ für jeden nichtleeren konvexen Körper K gilt und setzen $W_n^n(\emptyset) := 0$, dann gilt:

$$\int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_k(\mathbb{R}^n)} W_k^k(\alpha \cap K) d\alpha = \kappa_k \cdot \mu_k\{\alpha |\, \alpha \cap K \neq \emptyset\}$$

Deswegen schreibt sich die Behauptung des Satzes 2.4.2 auch als

$$\int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_k(\mathbb{R}^n)} W_k^k(\alpha \cap K) d\alpha = \frac{\kappa_k \kappa_{n-k}}{\kappa_n} W_k(K)$$

und ist dem Satz 2.4.4 bei $j = k$ äquivalent.

Beweis Wenden wir Satz 2.4.2 auf den konvexen Körper $\alpha \cap K \subset \alpha$ und j-dimensionalen Teilräume von α an. Die gerade erhaltene Umformulierung ergibt:

$$W_j^k(\alpha \cap K) = \frac{\kappa_k}{\kappa_j \kappa_{k-j}} \int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_j(\alpha)} W_j^j(\beta \cap (\alpha \cap K)) d\beta$$

Integrieren wir die beiden Seiten über $\mathbb{G}\mathrm{raff}_k(\mathbb{R}^n)$. Es gilt:

$$\int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_k(\mathbb{R}^n)} W_j^k(\alpha \cap K) d\alpha = \int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_k(\mathbb{R}^n)} \frac{\kappa_k}{\kappa_j \kappa_{k-j}} \left(\int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_j(\alpha)} W_j^j(\beta \cap (\alpha \cap K)) d\beta \right) d\alpha =$$
$$= \frac{\kappa_k}{\kappa_j \kappa_{k-j}} \int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_j(\mathbb{R}^n)} W_j^j(\beta \cap K) d\beta$$

und wiederum nach Satz 2.4.2:

$$\frac{\kappa_k}{\kappa_j \kappa_{k-j}} \int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_j(\mathbb{R}^n)} W_j^j(\beta \cap K) d\beta = \frac{\kappa_k}{\kappa_j \kappa_{k-j}} \cdot \frac{\kappa_j \kappa_{n-j}}{\kappa_n} W_j(K) = \frac{\kappa_k \kappa_{n-j}}{\kappa_{k-j}\kappa_n} W_j(K) \quad \square$$

Wir haben gerade noch einmal ein iteriertes Integral durch ein einfaches ersetzt. Das wird durch das folgende Lemma gerechtfertigt.

Lemma 2.4.1 *Sei* $f : \mathbb{G}\mathrm{raff}_j(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *eine integrierbare Funktion und* $k \geq j$*. Dann gilt:*

$$\int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_k(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_j(\alpha)} f(\beta)\, d\beta \right) d\alpha = \int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_j(\mathbb{R}^n)} f(\beta)\, d\beta)$$

Beweis Die Idee ist, dass Proposition 2.4.1 jedes Integral über einem affinen Grassmanian durch ein iteriertes Integral ersetzen lässt:

$$\int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_k(\mathbb{R}^n)} g(\alpha)\, d\alpha = \int_{\mathbb{G}\mathrm{r}_k(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{\xi^\perp} g(x+\xi)\, dx \right) d\xi$$

Wenn wir beide Integrale auf der linken Seite vom Lemma auf diese Weise entfalten, dann erhalten wir zwei Integrale über Grassmanianen und zwei über euklidischen Räumen. Die Integrale über Grassmanianen werden in ein Integral über Grassmanian zusammenklappen nach einem ähnlichen zu dem am Ende des Abschnitts 9 Argument, ebenso wie die Integrale über euklidischen Räumen. Die verbleibende zwei Integrale klappen genau ins Integral auf der rechten Seite vom Lemma zusammen. □

Aufgaben

1) (a) Bestimmen Sie die Durchschnittslänge einer Sehne des Einheitskreises.

   (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Sehne des Einheitskreises länger als $\sqrt{3}$ ist.

2) (a) Bestimmen Sie den Erwartungswert des Umfangs der orthogonalen Projektion des Einheitswürfels auf eine Ebene.

   (b) Bestimmen Sie den bedingten Erwartungswert des Umfangs des ebenen Schnittes des Einheitswürfels unter der Bedingung, dass der Schnitt nichtleer ist.

3) (Das Buffon'sche Nadelproblem) Man wirft eine Nadel der Länge L auf ein liniertes Blatt Papier (der Abstand zwischen benachbarten Linien ist 1). Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine der Linien trifft? Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Schnittpunkten von der Nadel mit den Linien?

4) Der Durchmesser $d(K)$ eines konvexen Körpers ist der maximale Abstand zwischen zweien seinen Punkten. Zeigen Sie:

   (a) Für $K \subset \mathbb{R}^2$ sei $U(K)$ der Umfang, $S(K)$ der Flächeninhalt von K. Dann gilt:
   $$U(K) \leq \pi d(K)$$
   $$S(K) \leq \frac{\pi d^2}{4}$$

   (b) Für $K \subset \mathbb{R}^3$ sei $F(K)$ der Flächeninhalt des Randes von K. Dann gilt:
   $$F(K) \leq \pi d^2$$

2.5 Nichtkonvexe Körper in der konvexen Geometrie

Unser Ziel ist es, die Quermaßintegrale für eine umfangreiche Klasse von nichtkonvexen Mengen zu definieren, nämlich für alle endlichen Vereinigungen von konvexen Körper. Das erlaubt insbesondere die bereits bewiesene integralgeometrischen Formeln auch für Mengen dieser Art zu erhalten.

2.5.1 Valuationen und Satz von Hadwiger

Bezeichnen wir mit $\mathcal{K}$ die Menge aller konvexen Körper in $\mathbb{R}^n$. Das Wort "Funktional" wird für eine Abbildung $\mathcal{K} \to \mathbb{R}$ stehen.

Definition 2.5.1 *Ein Funktional $\varphi : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ heißt Valuation auf $\mathcal{K}$, falls gilt:*
$$\varphi(K \cup L) + \varphi(K \cap L) = \varphi(K) + \varphi(L)$$
für alle $K, L \in \mathcal{K}$ mit $K \cup L \in \mathcal{K}$.

Ein Fundamentalsatz besagt, dass die obige Gleichheit die charakteristische Eigenschaft von Quermaßintegralen ist.

Proposition 2.5.1 *Die Quermaßintegrale sind Valuationen.*

Beweis Das 0-te Quermaßintegral ist das Volumen und es gilt $\mathrm{vol}(K \cup L) + \mathrm{vol}(K \cap L) = \mathrm{vol}(K) + \mathrm{vol}(L)$. Daraus erhalten wir die Valuationseigenschaft für die anderen Quermaßintegrale mit Hilfe der Steiner-Formel.

Es gelten offenbar die Gleichungen:

$$(K \cup L) + \rho B = (K + \rho B) \cup (L + \rho B)$$
$$(K \cap L) + \rho B = (K + \rho B) \cap (L + \rho B)$$

Folglich

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vol}((K \cup L) + \rho B) + \mathrm{vol}((K \cap L) + \rho B) = \\
&\qquad = \mathrm{vol}((K + \rho B) \cup (L + \rho B)) + \mathrm{vol}((K + \rho B) \cap (L + \rho B)) = \\
&\qquad\qquad = \mathrm{vol}(K + \rho B) + \mathrm{vol}(L + \rho B)
\end{aligned}$$

Die Anwendung der Steiner-Formel auf die linke und die rechte Seite dieser Gleichung ergibt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (W_k(K \cup L) + W_k(K \cap L))\rho^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (W_k(K) + W_k(L))\rho^k$$

Aus dem Koeffizientenvergleich folgt jetzt die Behauptung. □

Den folgenden Satz formulieren wir ohne Beweis.

Satz 2.5.1 (Hadwiger) *Ist $\varphi : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ eine bewegungsinvariante stetige Valuation, so gibt es reelle Konstanten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ mit*

$$\varphi(K) = \sum_{i=0}^{n} c_i W_i(K)$$

für alle $K \in \mathcal{K}$.

In der Definition 2.5.1 haben wir zwangsweise $K \cup L$ konvex vorausgesetzt. Man konnte aber für $K \cup L$ nichtkonvex einfach $\varphi(K \cup L) := \varphi(K) + \varphi(L) - \varphi(K \cap L)$ definieren und somit das Funktional φ auf eine größere Klasse von Mengen fortsetzen zu versuchen. Das werden wir gleich tun.

2.5.2 Konvexring und Konvexalgebra

In diesem Abschnitt führen wir einige algebraischen Hilfsmittel ein, die uns unser Plan zu verwirklichen helfen werden.

Definition 2.5.2 *Der Konvexring $\mathcal{R}$ ist die Gesamtheit aller Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die als Vereinigungen von endlich vielen konvexen Körpern dargestellt werden können:*

$$\mathcal{R} := \{R = \bigcup_{i=1}^{m} K_i |\ K_i \in \mathcal{K},\ m \in \mathbb{N}\}$$

Insbesondere enthält der Konvexring alle endlichen Vereinigungen von Polytopen. Solche Mengen heißen manchmal Polyeder (ohne das Adjektiv "konvex"). Beispiele von Polyeder sind: Eine endliche Vereinigung der Gitterwürfeln; der Rand eines Dreiecks.

Beachte auch, dass alle Elemente des Konvexrings kompakte Mengen sind.

Proposition 2.5.2 *Der Konvexring ist bezüglich der Operationen $\cup$ und $\cap$ abgeschlossen.*

Beweis Abgeschlossenheit bezüglich der Vereinigungsoperation ist klar. Für die Schnittoperation folgt es aus der Identität

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} K_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{p} L_i\right) = \bigcup_{i=1,\, j=1}^{i=m,\, j=p} (K_i \cap L_j) \quad \square$$

Die Menge $\mathcal{R}$ wird gerade deswegen ein Ring genannt, weil sie bezüglich $\cup$ und $\cap$ abgeschlossen ist, die hier die Rollen von $+$ und $\times$ spielen.

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wird definiert als

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases}$$

Der folgende Begriff soll uns die Arbeit mit dem Konvexring erleichtern.

Definition 2.5.3 *Die Konvexalgebra $\mathcal{A}$ ist die Menge aller linearen Kombinationen von Indikatorfunktionen konvexer Körper:*

$$\mathcal{A} := \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{1}_{K_i} |\ K_i \in \mathcal{K},\ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Die Menge $\mathcal{A}$ ist der durch die Indikatorfunktionen der konvexen Körper erzeugte (unendlichdimensionale) Untervektorraum des Vektorraumes aller Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Jedoch bilden diese keine Basis von $\mathcal{A}$, da sie linea-rabhängig sind. Eine lineare Abhängigkeit kann, zum Beispiel, durch $\mathbf{1}_{K\cup L} + \mathbf{1}_{K\cap L} = \mathbf{1}_K + \mathbf{1}_L$ gegeben werden, falls $K \cup L$ konvex ist.

Obwohl ziemlich abstrakt definiert, lässt die Konvexalgebra $\mathcal{A}$ eine geometrisch anschauliche Deutung zu. Ein Element von $\mathcal{A}$ kann als eine Kollektion von konvexen Körpern in $\mathbb{R}^n$ mit ihnen zugeordneten Gewichten gesehen werden, wobei zwei Kollektionen als äquivalent gelten, falls jeder Punkt von $\mathbb{R}^n$ dasselbe Gesamtgewicht (der sich aus der Summe von ihn überlagernden Körpern ergibt) in beiden hat.

Proposition 2.5.3 *Falls $f, g \in \mathcal{A}$, dann gilt $fg \in \mathcal{A}$.*

Beweis Klar, weil $\mathbf{1}_K \mathbf{1}_L = \mathbf{1}_{K\cap L}$ gilt und das Produkt zweier Elemente aus $\mathcal{A}$ als Linearkombination von Produkten $\mathbf{1}_{K_i}\mathbf{1}_{L_j}$ geschrieben werden kann. □

Proposition 2.5.4 *Seien A und B Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B \in \mathcal{A}$. Dann gilt $\mathbf{1}_{A\cup B} \in \mathcal{A}$, $\mathbf{1}_{A\setminus B} \in \mathcal{A}$.*

Beweis Die Behauptung gilt wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A\cup B} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B \\ \mathbf{1}_{A\setminus B} &= \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B \end{aligned}$$

und der vorigen Proposition. □

Korollar 2.5.1 *Für jede Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$, die sich aus konvexen Körpern durch Anwendung einer endlichen Anzahl von Operationen vom Typ $\cup, \cap$ und $\setminus$ gewinnen lässt, gehört ihre Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A$ zur Konvexalgebra $\mathcal{A}$. Insbesondere kann der Konvexring als Teilmenge der Konvexalgebra betrachtet werden:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \subset & \mathcal{A} \\ R & \mapsto & \mathbf{1}_R \end{array}$$

2.5.3 Eulercharakteristik

Definieren wir die Eulercharakteristik $\chi(K)$ eines konvexen Körpers $K \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$\chi(K) := \begin{cases} 1 & \text{für } K \neq \emptyset \\ 0 & \text{für } K = \emptyset \end{cases}$$

Die Eulercharakteristik ist also das normierte n-te Quermaßintegral von K.

Satz 2.5.2 *Es gibt eine eindeutige Fortsetzung des Funktionals χ auf den Konvexring $\mathcal{R}$, die die Valuationseigenschaft*

$$\chi(R \cup S) + \chi(R \cap S) = \chi(R) + \chi(S)$$

für alle $R, S \in \mathcal{R}$ besitzt.

Beweis Es ist nicht schwer zu zeigen, dass eine solche Fortsetzung, falls sie existiert, eindeutig ist. Tatsächlich, aus der Valuationseigenschaft folgt mit Induktion:

$$\chi\left(\bigcup_{i=1}^{m} K_i\right) = \sum_{1\leq i\leq m} \chi(K_i) - \sum_{1\leq i<j\leq m} \chi(K_i \cap K_j) + \cdots + (-1)^{m+1}\chi\left(\bigcap_{i=1}^{m} K_i\right)$$

Auf der rechten Seite tauchen nur konvexe Körper auf. Da ihre Eulercharakteristik bereits festgelegt wurde, bestimmt die obige Formel die Eulercharakteristik einer beliebigen Menge aus $\mathcal{R}$ eindeutig.

Das eigentliche Problem ist, dass ein $R \in \mathcal{R}$ normalerweise mehrere verschiedenen Darstellungen als Vereinigung konvexer Körper besitzt. Ob man aus allen Darstellungen denselben Wert von $\chi(R)$ erhält, ist nicht sofort klar. Um zu beweisen, dass es trotzdem der Fall ist, benutzen wir die Konvexalgebra $\mathcal{A}$.

Lemma 2.5.1 *Wenn $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung ist, dann gilt für die Einschränkung von χ auf $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ die Valuationseigenschaft.*

Beweis In der Tat, mittels $R \mapsto \mathbf{1}_R$ auf die Sprache der Algebra $\mathcal{A}$ übersetzt, lautet die Valuationseigenschaft für Elemente von $\mathcal{R}$ wie folgt:

$$\chi(\mathbf{1}_{R\cup S}) + \chi(\mathbf{1}_{R\cap S}) = \chi(\mathbf{1}_R) + \chi(\mathbf{1}_S)$$

Diese Gleichheit gilt wegen $\mathbf{1}_{R\cup S} + \mathbf{1}_{R\cap S} = \mathbf{1}_R + \mathbf{1}_S$ und wegen der Linearität von χ. $\square$Lemma

Somit reicht es die Existenz einer linearen Fortsetzung von χ auf $\mathcal{A}$ zu zeigen. Da wir $\chi(\mathbf{1}_K) = 1$ für jeden nichtleeren konvexen Körper K bereits festgelegt haben, soll diese Fortsetzung wie folgt aussehen:

$$\chi\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{1}_{K_i}\right) := \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

Die Wohldefiniertheit dieser Abbildung wird durch das folgende Lemma gewährleistet:

Lemma 2.5.2 *Falls* $\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{1}_{K_i} = 0$ *für nichtleeren konvexen Körper* $\{K_i\}_{i=1}^m$ *gilt, dann gilt auch* $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$.

Beweis Wir führen Induktion nach der Dimension n des umgebenden Raumes. Als Basis kann man $n = 0$ betrachten. Dann sind alle Körper K_i einpunktigen Mengen und die Behauptung ist klar.

Für den Induktionsschritt unterscheiden wir nun zwei Fälle:

1) Angenommen gibt es eine Hyperebene H in $\mathbb{R}^n$, die alle K_i, $i = 1, \ldots, m$ trifft. Dann folgt die Behauptung $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$ aus der Induktionsannahme, da für die Durchschnitte $K_i \cap H$ ebenfalls $\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{1}_{K_i \cap H} = 0$ gilt.

2) Wenn es keine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ gibt, die alle K_i, $i = 1, \ldots, m$ trifft, dann gibt es i und j, so dass $K_i \cap K_j = \emptyset$. Das folgt aus dem Satz von Helly, vgl. Aufgabe 1 aus Blatt 2. Für diesen Fall führen wir jetzt Induktion nach der Anzahl m von Körper K_i. Für zwei Körper ist die Behauptung trivial. Sei nun $K_i \cap K_j = \emptyset$. Dann gibt es eine K_i von K_j trennende Hyperebene H. Bezeichnen wir mit H^+ und H^- die zugehörigen Halbräume und betrachten die konvexen Körper

$$K_i^+ := K_i \cap H^+ \qquad\qquad K_i^- := K_i \cap H^-$$

Durch Einschränkung von Indikatorfunktionen auf H^+ bzw. H^- erhalten wir

$$\sum_{K_i^+ \neq \emptyset} \lambda_i \mathbf{1}_{K_i^+} = 0 \qquad\qquad \sum_{K_i^- \neq \emptyset} \lambda_i \mathbf{1}_{K_i^-} = 0$$

(Die Summationsbereiche haben wir absichtlich so gewählt, dass nur die Indikatorfunktionen von nichtkonvexen Körpern in Betracht kommen.) Insbesondere besteht jede der beiden Summen aus weniger als m Summanden. Aus der Induktionsannahme nach m gilt deswegen

$$\sum_{K_i^+ \neq \emptyset} \lambda_i = 0 \qquad\qquad \sum_{K_i^- \neq \emptyset} \lambda_i = 0$$

Betrachten wir zudem die Durchschnitte

$$K_i^0 := K_i \cap H$$

Ebenso wie im Fall 1) schließen wir aus der Annahme unseres Induktionsarguments nach n

$$\sum_{K_i^0 \neq \emptyset} \lambda_i = 0$$

Und letztlich

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = \sum_{K_i^+ \neq \emptyset} \lambda_i + \sum_{K_i^- \neq \emptyset} \lambda_i - \sum_{K_i^0 \neq \emptyset} \lambda_i = 0 \quad \Box\text{Lemma}$$

Somit ist die Behauptung des Satzes bewiesen. □Satz

Beachte, dass wir sogar mehr als vorgenommen bewiesen haben: die Algebra $\mathcal{A}$ enthält Indikatorfunktionen aller durch $\cup$, $\cap$ und $\setminus$ aus konvexen Körper erzeugten Mengen. Auf Mengen dieser Art wurde also die Eulercharakteristik auch fortgesetzt, so dass die Valuationseigenschaft immer noch gilt.

Mit Hilfe von der Inklusion-Exklusion Formel, die wir am Anfang des Beweises gekriegt haben, kann man die Eulercharakteristik sehr einfach berechnen. Vergewissern Sie sich, dass $\chi(\partial\Delta^2) = 0$, $\chi(\text{int}\Delta^2) = 1$ gilt, wobei Δ^2 der 2-dimensionale Simplex (das Dreieck) ist. Was ist die Eulercharakteristik des Inneren des 3-Simplex?

2.5.4 Quermaßintegrale und Schnittformeln für nichtkonvexe Mengen

Jetzt können wir die Schnittformeln aus der letzten Vorlesung auf die Mengen aus $\mathcal{R}$ erweitern.

Definition 2.5.4 *Für $R \in \mathcal{R}$*

$$W_k(R) := \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-k}} \int_{\mathbb{G}\text{raff}_k(\mathbb{R}^n)} \chi(\alpha \cap R) d\alpha$$

Proposition 2.5.5 *Das so definierte Quermaßintegral besitzt die Valuationseigenschaft.*

Beweis Der Integrand besitzt diese Eigenschaft. □

Satz 2.5.3 *Es gilt die Schnittformel*

$$\int_{\mathbb{G}\text{raff}_k(\mathbb{R}^n)} W_j^k(\alpha \cap R)\, d\alpha = \frac{\kappa_k \kappa_{n-j}}{\kappa_{k-j}\kappa_n} W_j(R)$$

Beweis Der Beweis der allgemeinen Schnittformel aus der letzten Vorlesung kann wörtlich übertragen werden. □

Einen interessanter Spezialfall dieser Formel erhält man für die Schnitte einer ebenen Kurve mit einer Geraden:

Korollar 2.5.2 *Sei C eine beschränkte gebrochene Linie auf der Ebene. Dann gilt für ihre Länge:*

$$|C| = \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{G}\mathrm{raff}_1(\mathbb{R}^2)} |C \cap \alpha| \, d\alpha,$$

wobei $|C \cap \alpha|$ die Anzahl der Schnittpunkte von C mit der Geraden α ist.

Aufgaben

1) Seien K, L, M konvexe Körper in $\mathbb{R}^n$ so dass $K \cup L \cup M$ auch konvex ist. Angenommen, alle paarweisen Durchschnitte $K \cap L$, $L \cap M$, $M \cap K$ sind nichtleer. Zeigen Sie: $K \cap L \cap M \neq \emptyset$.

2) Zeigen Sie:
$$W_k(\lambda K) = \lambda^{n-k} W_k(K) \text{ für } \lambda > 0$$

3) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Gerade die Ziffer "8" in drei Stücke teilt?

4) (Euler-Formel) Sei K ein Polytop in $\mathbb{R}^n$, und sei f_k die Anzahl seiner k-dimensionalen Seiten, $k = 0, \ldots, n-1$. Zeigen Sie:
$$\chi(\partial K) = f_0 - f_1 + \cdots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}$$

5) Sei c eine geschlossene ebene Kurve. Für konvexe Körper $K \subset \mathbb{R}^2$, die im von c berandeten Bereich liegen, definiere
$$\varphi(K) := \int_c \gamma(x) \, dx,$$
wobei $\gamma(x)$ der Winkel zwischen zwei durch x gehenden Stützgeraden von K ("der scheinbare Durchmesser") ist.

   (a) Zeigen Sie, dass φ eine Valuation ist.

   (b) Sei c_r die Kreislinie vom Radius r und mit Zentrum im Koordinatenursprung. Berechnen Sie $\lim_{r\to\infty} \varphi_r$, wobei φ_r sich auf c_r bezieht.

Kommentare

Eine detaillierte Aufbau der Theorie des Volumens und Flächeninhaltes findet man im Buch von Hadwiger [5]. In unserer Darstellung von gemischten Volumina und ihrer Eigenschaften folgen wir [2] und [7]. Über Integralgeometrie siehe [9]. Integralgeometrie, geometrische Wahrscheinlichkeitstheorie und Valuationen werden in [6] behandelt. Dort findet man auch eine interessante Analogie zwischen dem Grassmanian $\mathbb{G}\mathrm{r}_k(\mathbb{R}^n)$ und der Menge aller k-Kombinationen aus einer n-elementigen Menge. Von diesem Standpunkt aus betrachten Klain und Rota das Volumen des Grassmanians als ein Analogon des Binomialkoeffizienten. Die Eulercharakteristik als eine Art Maß wurde zuerst bei Hadwiger in [4] betrachtet.

Kapitel 3

Gitter und konvexe Körper

3.1 Gitterpunktezahl und Volumina

Unter Gitterpunkten verstehen wir immer Punkte des Gitters

$$\mathbb{Z}^n = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n |\; x_i \in \mathbb{Z} \text{ für alle } i\},$$

also Punkte, deren Koordinaten ganze Zahlen sind. Ein Gitterpolytop ist ein Polytop, dessen Ecken Gitterpunkte sind. Wenn $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge ist, dann bezeichnen wir mit $G(A)$ und benennen wir *Gitterpunktezahl* die Anzahl der Gitterpunkte innerhalb A:

$$G(A) := |A \cap \mathbb{Z}^n|$$

Bemerke, dass G eine Valuation ist. Sie ist aber nicht bewegungsinvariant und nicht stetig. Deswegen ist der Satz von Hadwiger auf sie nicht anwendbar und es entsteht ein gar nicht einfacher Zusammenhang zwischen G und dem Volumen.

3.1.1 Approximative Berechnung

In diesem Abschnitt betrachten wir eine beliebige (nicht unbedingt konvexe, aber messbare) Teilmenge A von $\mathbb{R}^n$.

Es ist anschaulich klar, dass die Gitterpunktezahl ungefähr gleich dem Volumen der Menge ist. Dieses “ungefähr“ kann man auf mehreren Weisen auswerten.

Das erste “ungefähr“ ist “durchschnittlich“. Betrachten wir alle möglichen Parallelverschiebungen von A. Wegen der Periodizität des Gitters reicht es allein die Verschiebungen $x + A$, $x = (x^1, \dots, x^n)$ mit $0 \le x^i \le 1$ zu betrachten. Wenn wir jetzt die Gitterpunktezahl $G(x + A)$ als Funktion von $x \in [0, 1]^n$ betrachten, dann kommt heraus, dass $\mathrm{vol}(A)$ der Integralmittelwert von $G(x + A)$ ist.

Proposition 3.1.1 *Für jede messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$\mathrm{vol}(A) = \int_{[0,1]^n} G(x + A)dx$$

Beweis Diese Gleichheit kann ziemlich einfach mit Induktion nach der Dimension n bewiesen werden. Wir beweisen sie aber anders. Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_{x+A}(g)$ sagt uns, ob der Punkt g in der Menge $x + A$ liegt oder nicht. Insbesondere gilt die Gleichheit

$$G(x + A) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{1}_{x+A}(g)$$

Integrieren wir jetzt die Indikatorfunktionen einzeln.

$$\int_{[0,1]^n} \mathbf{1}_{x+A}(g)dx = \int_{[0,1]^n} \mathbf{1}_A(g - x)dx = \mathrm{vol}\{x \in [0, 1]^n |\ g - x \in A\} =$$
$$= \mathrm{vol}(A \cap (g - [0, 1]^n))$$

Dabei ist $g - [0, 1]^n$ der Würfel unseres Gitters, so dass g eine von seinen Ecken ist, und zwar “die rechte obere“. Die Würfel $g - [0, 1]^n$ bedecken den ganzen $\mathbb{R}^n$, so dass ihre Durchschnitte Dimension kleiner als n und somit ein verschwindendes Volumen haben. Daraus folgt

$$\int_{[0,1]^n} G(x + A)dx = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} \mathrm{vol}(A \cap (g - [0, 1]^n)) = \mathrm{vol}(A) \quad \square$$

Das zweite “ungefähr“ sagt: ’der Defekt liegt am Rand’. Die Idee ist, dass wenn wir jedem Gitterpunkt innerhalb A den Einhetswürfel mit Zentrum in diesem Punkt zuordnen, dann approximiert die entstehende Figur die Menge A im gewissen Sinne.

Proposition 3.1.2 *Für jede meßbare Menge A gilt*

$$\mathrm{vol}(A - \frac{\sqrt{n}}{2}B) \leq G(A) \leq \mathrm{vol}(A + \frac{\sqrt{n}}{2}B)$$

Beweis Bezeichnen wir mit $\square$ den Einheitswürfel mit Zentrum im Koordinatenursprung:

$$\square := \{(x^1, \ldots, x^n)|\ |x^i| \leq \frac{1}{2}\}$$

Definieren wir die Menge $A_\square$ als Vereinigung aller Einheitswürfeln mit Zentren in Gitterpunkten innerhalb A. Es gilt:

$$A - \square \subset A_\square \subset A + \square$$

Die zweite Inklusion gilt wegen $A_\square = (A \cap \mathbb{Z}^n) + \square$. In der ersten müssen wir zuerst die Bedeutung des Minuszeichen erklären. Die Minkowski-Differenz wird definiert als

$$A - C := \{x|\ x + C \subset A\}$$

(Mit anderen Worten, $A - C$ ist die größte unter allen Mengen D mit der Eigenschaft $D + C \subset A$.) Nun sei $x \in A - \square$. Dann gilt $x + \square \subset A$. Aber der Würfel $x + \square$ enthält auch mindestens einen Gitterpunkt y. Dann gilt $x \in y + \square \subset A_\square$.

Ferner, es gilt nach dem Satz von Pythagoras $\square \subset \frac{\sqrt{n}}{2}B$ und deswegen $A - \square \supset A - \frac{\sqrt{n}}{2}B$, $A + \square \subset A + \frac{\sqrt{n}}{2}B$. Somit gilt

$$A - \frac{\sqrt{n}}{2}B \subset A_\square \subset A + \frac{\sqrt{n}}{2}B,$$

woraus folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung Statt jedem Gitterpunkt g innerhalb A den Würfel mit Zentrum in g zuzuordnen, kann man genauso gut den Würfel nehmen, der g als z. B. die "linke untere" Ecke hat, oder dessen Lage bezüglich g auf eine andere Weise festgelegt wird. Dann gelten dieselbe Inklusionen, wie im Beweis, wenn jetzt $\square$ der dem Ursprung zugeordnete Würfel ist.

Man bemerkt sofort, dass die obige Proposition im Falle eines konvexen Körpers A eine Abschätzung von $G(A)$ mittels Quermaßintegrale von A gibt.

Ein einfaches aber interessantes Beispiel entsteht wenn wir $A = rB$, die Kugel vom Radius r, setzen. In der Dimension $n = 2$ ergibt die Proposition 3.1.2:

$$\pi \left(r - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq G(rB) \leq \pi \left(r + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Folglich, bei $r \to \infty$ erhalten wir

$$\frac{G(rB)}{r^2} \to \pi$$

Für die Anzahl von Gitterpunkten innerhalb einer Kreisscheibe hat sich Gauß interessiert. Er hat sogar für mehreren Werten von r die Zahl $G(rB)$ empirisch bestimmt. Zum Beispiel, im Kreis vom Radius 100 liegen 31417 Gitterpunkte, im Kreis vom Radius 300 gibt es 282697 von denen. Wahrscheinlich nicht die letzte Rolle hat dabei für Gauß die Tatsache gespielt, dass $G(rB)$ die Anzahl der Lösungen der Ungleichung

$$m^2 + n^2 \leq r^2$$

in ganzen Zahlen m und n ist. Unter Anwendung eines Zahlenteoretisches Satzes kann man mit dieser Überlegung eine schöne Gleichheit

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

beweisen. Siehe dafür Anschauliche Geometrie von Hilbert und Cohn-Vossen.

3.1.2 Gitterpunktezahl eines halboffenen Parallelepipeds

Es ist anschaulich klar, dass Proposition 3.1.2 eine gute Abschätzung dann gibt, wenn die Menge A "groß" genug ist. Diese Idee wird uns helfen, eine genaue Gleichung aus diesem approximativen Ergebnis zu gewinnen.

Definition 3.1.1 *Seien $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Z}^n$ ganzzahlige linear unabhängige Vektoren. Das durch diese Vektoren erzeugte abgeschlossene Parallelepiped wird definiert als*

$$\Pi[v_1, \ldots, v_n] = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i |\ 0 \leq \lambda_i \leq 1 \textit{ für alle } i\}$$

Analog, das halboffene Parallelepiped wird definiert als

$$\Pi[v_1, \ldots, v_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i |\ 0 \leq \lambda_i < 1 \textit{ für alle } i\}$$

Ein Parallelepiped erzeugt eine Parkettierung des Raumes. Dabei ist es nicht schwer zu sehen, dass die halboffene Parallelepipede den Raum ohne Überlappungen bedecken. Das ist die zweite Idee, die zum Beweis des folgenden Satzes führt.

Satz 3.1.1 *Die Gitterpunktezahl eines halboffenes Parallelepipeds* $\Pi[v_1, \ldots, v_n)$ *ist seinem Volumen gleich:*

$$G(\Pi[v_1, \ldots, v_n)) = \mathrm{vol}(\Pi[v_1, \ldots, v_n))$$

Beweis Der Kürze halber bezeichnen wir $\Pi := \Pi[v_1, \ldots, v_n)$. Das halboffene Parallelepiped $t\Pi = \Pi[tv_1, \ldots, tv_n)$, $t \in \mathbb{N}$, kann in t^n Parallelverschiebungen von Π zerlegt werden:

$$t\Pi = \bigcup_{\{\tau_i\}} (\sum_{i=1}^{n} \tau_i v_i + \Pi), \quad \tau_i \in \{0, 1, \ldots, t\}$$

Dabei $G(\sum_{i=1}^n \tau_i v_i + \Pi) = G(\Pi)$, weil $\sum_{i=1}^n \tau_i v_i$ ein ganzzahliges Vektor ist. Somit folgt

$$G(t\Pi) = t^n G(\Pi)$$

Die Proposition 3.1.2 ergibt für $A = t\Pi$

$$\mathrm{vol}(t\Pi - \frac{\sqrt{n}}{2}B) \leq G(t\Pi) \leq \mathrm{vol}(t\Pi + \frac{\sqrt{n}}{2}B)$$

Da $t\Pi - \frac{\sqrt{n}}{2}B = t(\Pi - \frac{\sqrt{n}}{2t}B)$ gilt, und das Volumen homogen vom Grad n ist, ergibt sich durch Dividieren mit t

$$\mathrm{vol}(\Pi - \frac{\sqrt{n}}{2t}B) \leq G(\Pi) \leq \mathrm{vol}(\Pi + \frac{\sqrt{n}}{2t}B)$$

Jetzt reicht es zu zeigen, dass bei $t \to \infty$ beide Schranken gegen $\mathrm{vol}(\Pi)$ konvergieren. Mit der oberen ist es klar, da $\mathrm{hdist}(\Pi, \Pi + \frac{\sqrt{n}}{2t}B) = \frac{\sqrt{n}}{2t} \to 0$ gilt. Mit der unteren ist es schwieriger, da $\mathrm{hdist}(\Pi, \Pi - \frac{\sqrt{n}}{2t}B)$ groß ist, wenn Π einen schmalen Winkel hat. Bemerke aber, dass jeder Punkt, der außerhalb $\Pi - \frac{\sqrt{n}}{2t}B$, aber innerhalb Π liegt, einen kleineren als $\frac{\sqrt{n}}{2t}$ Abstand zum Rand des abgeschlossenen Parallelepipeds $\overline{\Pi}$ hat. Deswegen ist die Mengendifferenz $\Pi \setminus (\Pi - \frac{\sqrt{n}}{2t}B)$ ganz in der Vereinigung von Prismen der Höhe $\frac{\sqrt{n}}{2t}$ über Facetten von $\overline{\Pi}$ enthalten. Somit gilt

$$\mathrm{vol}(\Pi - \frac{\sqrt{n}}{2t}B) \geq \mathrm{vol}(\Pi) - \frac{\sqrt{n}}{2t}\mathrm{area}(\partial\overline{\Pi})$$

und die untere Schranke konvergiert ebenfalls gegen $\mathrm{vol}(\Pi)$. $\square$

3.1.3 Die Formel von Pick

Satz 3.1.2 *Sei P ein Gitterpolygon (Gitterpolytop in $\mathbb{R}^2$). Dann gilt*

$$\mathrm{vol}(P) = G(\mathrm{int}P) + \frac{1}{2}G(\partial P) - 1$$

Lemma 3.1.1 *Die Formel von Pick gilt für ein Dreieck mit Ecken in den Gitterpunkten.*

Beweis Sei Δ unser Dreieck. OBdA ist eine seinen Ecken der Koordinatenursprung. Seien v_1 und v_2 die zwei anderen. Betrachten wir das halboffene Parallelogramm $\Pi = \Pi[v_1, v_2)$. Es kann in Δ und ein zu Δ kongruentes Dreieck zerschnitten werden (in höheren Dimensionen ist es nicht möglich!). Wenn man diese Zerlegung genauer anschaut, dann sieht man, dass das zweite Dreieck durch die Zentralsymmetrie $x \mapsto v_1 + v_2 - x$ aus Δ hervorkommt und es gilt:

$$\Pi = (\Delta \setminus \{v_1, v_2\}) \cup (v_1 + v_2 - \mathrm{int}\Delta),$$

wobei die vereinigten Mengen disjunkt sind. Die Transformation $x \mapsto v_1 + v_2 - x$ führt Gitterpunkte in Gitterpunkte, und deswegen gilt

$$G(\Pi) = (G(\Delta) - 2) + G(\mathrm{int}\Delta)$$

Andererseits, $\mathrm{vol}(\Delta) = \frac{1}{2}\mathrm{vol}(\Pi) = \frac{1}{2}G(\Pi)$. Folglich,

$$\mathrm{vol}(\Delta) = \frac{1}{2}(G(\Delta) + G(\mathrm{int}\Delta) - 2) = G(\mathrm{int}\Delta) + \frac{1}{2}G(\partial\Delta) - 1 \quad \square$$

Beweis des Satzes Seien $0, v_1, \ldots, v_m$ die Ecken von P, $[0, v_1], [v_1, v_2], \ldots, [v_m, 0]$ seine Kanten. Unterteilen wir P in Dreiecke $\Delta_i = \mathrm{conv}\{0, v_i, v_{i+1}\}$, $i = 1, \ldots, m-1$. Dann gilt

$$\mathrm{vol}(P) = \sum_i \mathrm{vol}(\Delta_i) = \sum_i \left(G(\mathrm{int}\Delta) + \frac{1}{2}G(\partial\Delta) - 1\right)$$

Schauen wir, wie oft wurde im Ausdruck rechts jeder einzelne Gitterpunkt von P gezählt. Die innere Gitterpunkte von Dreiecken einmal. Die Punkte, die in offenen Intervallen $[0, v_i]$, $i = 1, \ldots, m$ liegen, auch einmal $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$. Nun, was passiert am Rand? Alle Punkten im Inneren der Kanten werden mit dem Koeffizient $\frac{1}{2}$ gezählt. Nur die Ecken zählen wir zu oft. Und zwar, 0 zählen wir $\frac{m-1}{2}$ Mal, also $\frac{m-2}{2}$ Mal zuviel, und jede der Ecken $v_2, \dots, v_{m-1}$ ein halbes Mal zuviel. Insgesamt haben wir

$$\mathrm{vol}(P) = G(\mathrm{int}P)+\frac{1}{2}G(\partial\Delta)+\frac{m-2}{2}+\frac{m-2}{2}-(m-1) = G(\mathrm{int}P)+\frac{1}{2}G(\partial\Delta)-1 \quad \square$$

Aufgaben

1) (a) Wie sieht die Menge der Gitterpunkten $\{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{Z}^3 |\ x^1 + x^2 + x^3 = 0\}$ aus?

   (b) Gibt es eine Ebene L in $\mathbb{R}^3$, deren Durchschnitt mit $\mathbb{Z}^3$ ein Sechseckgitter ist?

2) Zeigen Sie: In $\mathbb{R}^3$ existieren Simplexe mit Ecken in Gitterpunkten, die keine anderen Gitterpunkten enthalten, aber ein beliebig großes Volumen haben können.

3) Zeigen Sie, dass das Volumen eines Gitterpolytops in $\mathbb{R}^n$ nicht kleiner als $\frac{1}{n!}$ ist.

4) Für $I \subset \{1, \dots, n\}$ bezeichne mit ξ_I den durch Basisvektoren e_i, $i \in I$ aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie für ein konvexes Körper K:
$$G(K) \leq \sum_I \mathrm{vol}_{n-|I|}(\mathrm{pr}_{\xi_I} K)$$

5) Man betrachtet Darstellungen von natürlichen Zahlen als Summen dreier Quadraten. Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante C, so dass für unendlich vielen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung
$$k^2 + l^2 + m^2 = n$$
mehr als $C\sqrt{n}$ Lösungen in natürlichen Zahlen k, l und m hat.

Hinweise

1b) Nein.
2) Versuchen Sie einen solchen Simplex zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 1$ zu finden.
4) Man muss die gemischten Volumina mit dem Würfel interpretieren. Es kann dabei helfen, dass der Würfel Minkowski-Summe von Strecken ist.

3.2 Geometrie der Zahlen

Die im Titel stehende Wortverbindung wurde von Minkowski eingeführt. Das war der Titel seines Buches, das 1896 erschien.

3.2.1 Satz von Blichfeldt und Satz von Minkowski

Der folgende Satz findet zahlreiche Anwendungen in der Geometrie der Zahlen. Er wird uns als Lemma beim Beweis des Satzes von Minkowski dienen.

Satz 3.2.1 (Blichfeldt) *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ meßbar mit $\mathrm{vol}(A) > 1$. Dann existieren zwei Punkte $x_1, x_2 \in A$, deren Differenz ein ganzzahliger Vektor ist:*

$$\exists\, x_1, x_2 \in A: \; x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}^n$$

Beweis Nach der Proposition 12.1 gilt $\mathrm{vol}(A) = \int_{[0,1]^n} G(x+A)dx$. Also nach unserer Voraussetzung gilt

$$\int_{[0,1]^n} G(x+A)dx > 1$$

Folglich gibt es ein $x \in [0,1]^n$ mit $G(x+A) > 1$. Da $G(x+A)$ eine ganze Zahl ist, folgt daraus

$$G(x+A) \geq 2 \text{ für ein } x,$$

und das heißt, es gibt zwei Punkte

$$g_1, g_2 \in (x+A) \cap \mathbb{Z}^n$$

Setze $x_1 := g_1 - x$ und $x_2 := g_2 - x$. Dann $x_1, x_2 \in A$ und $x_1 - x_2 = g_1 - g_2$. $\square$

Satz 3.2.2 (Minkowski) *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine meßbare Menge mit folgenden Eigenschaften:*

1) A ist konvex;

2) A ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs;

3) $\mathrm{vol}(A) > 2^n$.

Dann enthält A außer dem Koordinatenursprung noch mindestens einen Gitterpunkt.

Die Eigenschaft 3) kann auch durch die folgende ersetzt werden:

3)' A ist kompakt und $\mathrm{vol}(A) \geq 2^n$.

Beweis Betrachte die Menge $\frac{1}{2}A$. Nach der Eigenschaft 3) gilt

$$\mathrm{vol}(\frac{1}{2}A) > 1,$$

und das ergibt nach dem Satz von Blichfeldt zwei Punkte

$$x_1, x_2 \in \frac{1}{2}A \text{ mit } x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}^n.$$

Betrachte die Punkte $2x_1, 2x_2 \in A$. Da A symmetrisch bzgl. 0 ist, so gilt $-2x_2 \in A$. Nun da A konvex ist, liegt der Mittelpunkt der Strecke zwischen $2x_1$ und $-2x_2$ ebenfalls in A:

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{2}(2x_1) + \frac{1}{2}(-2x_2) \in A$$

Jetzt gelte statt 3) die Eigenschaft 3)'. Man kann eine Folge $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ von konvexen Körpern finden, so dass für jede A_i die Bedingungen 1),2),3) erfüllt sind und $A_i \to A$ gilt. (Zum Beispiel kann man $A_i = A + \frac{1}{i}B$ setzen.) Nach dem bereits bewiesenen enthält jede A_i einen Gitterpunkt $x_i \neq 0$. Die Folge $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ist beschränkt, weil $\mathrm{dist}(x_i, A) \leq \mathrm{hdist}(A_i, A) \to 0$ gilt und A selbst beschränkt ist. Somit ist eine konvergierende Teilfolge in $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ enthalten. Sei x ihr Grenzwert. Dann ist x ein Gitterpunkt. Er liegt außerdem in A, weil $\mathrm{dist}(x, A) = 0$ gilt und A kompakt ist. □

3.2.2 Rationale Approximation

Sei α eine irrationale Zahl. Gesucht wird eine gute Approximation von α mit rationalen Zahlen. Es ist klar, dass für jedes q ein p mit $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q}$ existiert: betrachte die Zahl k mit der Eigenschaft $\alpha \in [\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}]$ und nimm den zu α nächsten Endpunkt des Intervalls. Es stellt sich heraus, dass viel bessere Näherungen möglich sind:

Satz 3.2.3 (Dirichlet) *Für jede irrationale Zahl α gibt es unendlich viele rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ mit der Eigenschaft*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$$

Insbesondere kann der Nenner q beliebig groß sein.

Beweis Auf der Koordinatenebene betrachte die Gerade $y = \alpha x$. Für eine (große) positive Zahl Q betrachte ein (schmales) Parallelogramm

$$A_Q = \{(x, y)|\ |y - \alpha x| \leq \frac{1}{Q},\ |x| \leq Q\}$$

Die zur y-Achse parallele Seite von A_Q hat die Länge $\frac{2}{Q}$, die zugehörige Höhe ist $2Q$. Somit hat A_Q den Flächeninhalt 4. Es ist außerdem symmetrisch bezüglich des Ursprungs. Deswegen existiert nach dem Satz von Minkowski ein Gitterpunkt $g \in A_Q$, $g \neq 0$. Sei $g = (q, p)$. Dann gilt

$$|p - \alpha q| \leq \frac{1}{Q} \leq \frac{1}{q}$$

und folglich

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$$

In der Tat gilt hier die strenge Ungleichung $<$, weil α irrational ist. Jetzt müssen wir zeigen, dass es unendlich viele Brüche gibt, für die die obige Ungleichung gilt. Nehmen wir an, das sei nicht der Fall, und $\{\frac{p_i}{q_i}\}_{i=1}^N$ sei die endliche Menge von "guten" Approximationen. Dann sind aber alle Zahlen $|\alpha - \frac{p_i}{q_i}|$ nicht Null, und man kann eine Zahl Q finden mit $\frac{1}{Q} < |p_i - \alpha q_i|$ für alle i. Nach dem obigen Argument existiert ein Bruch $\frac{p}{q}$, der ebenfalls eine gute Approximation $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ ergibt, aber für den $|p - \alpha q| \leq \frac{1}{Q}$ gilt. Das widerspricht der Annahme, dass die Menge $\{\frac{p_i}{q_i}\}_{i=1}^N$ alle Approximationen mit dieser Eigenschaft enthalte. $\square$

Das Ergebnis dieses Satzes kann verbessert werden, aber nur um einen konstanten Faktor. Nämlich, für jede irrationale Zahl α gibt es unendlich viele Appoximationen mit der Eigenschaft

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

Besseres kann man im Allgemeinen nicht erreichen: der goldene Schnitt $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ hat für jede $C < \frac{1}{\sqrt{5}}$ nur endlich viele Approximationen $\frac{p}{q}$, die den Fehler kleiner als $\frac{C}{q^2}$ ergeben. Darüber hinaus, jede algebraische Zahl (ein Wurzel einer Polynomialen Gleichung) kann nicht besser als mit dem Fehler der zweiten Ordnung approximiert werden (Roth, 1955). Der Satz von Roth ist sehr schwierig. Es gilt eine einfachere, aber auch sehr starke Behauptung: Wenn α Wurzel einer polynomialen Gleichung des Grades n ist, dann gibt es eine Konstante $C(\alpha)$ so dass die Ungleichung $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{C(\alpha)}{q^n}$ keine Lösungen hat (Liouville, 1844). Insbesondere, jede "zu gut" approximierbare Zahl ist transzendent. So kann man zum Beispiel Transzendenz der Zahl $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$ zeigen.

3.2.3 Packungsdichte

Betrachten wir das Problem der dichtesten Kugelpackung. Wir werden nur die Packungen betrachten, wo die Zentren der Kugeln in Knoten eines Gitters liegen. Das Begriff des Gitters müssen wir nun verallgemeinern.

Definition 3.2.1 *Ein der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ zugehöriges Gitter $\Gamma = \Gamma(v_1, \ldots, v_n)$ ist die Punktmenge $\{k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n |\ k_i \in \mathbb{Z}$ für alle $i\}$. Das Standardgitter $\mathbb{Z}^n$ entspricht also der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$.*

Die Determinante $\det(\Gamma)$ *des Gitters ist der Absolutbetrag der Determinante der Matrix $(v_1, \ldots, v_n)$ und somit ist dem Volumen des Parallelepipeds $\Pi[v_1, \ldots, v_n]$ gleich:*

$$\det(\Gamma) := |\det(v_1, \ldots, v_n)| = \mathrm{vol}(\Pi[v_1, \ldots, v_n])$$

Die Packung besteht aus den Kugeln $\{g + B_r\}_{g \in \Gamma}$ vom Radius r. Damit die Kugeln sich nicht überlappen, muss r nicht größer als die Hälfte des kleinsten Abstands zwischen den Gitterpunkten sein.

Definition 3.2.2 *Die Größe*

$$\rho(\Gamma) = \frac{1}{2} \min_{g,h \in \Gamma} \mathrm{dist}(g, h)$$

heißt der Radius der Gitterpackung. Der Grenzwert

$$\sigma(\Gamma) = \lim_{R \to \infty} \frac{\mathrm{vol}(B_R \cap X)}{\mathrm{vol}(B_R)},$$

wobei $X = \cup_{g \in \Gamma}(g + B_{\rho(\Gamma)})$, heißt die Dichte der Gitterpackung.

Die Existenz des obigen Grenzwertes und ein Mittel zur seinem Berechnung wird durch die folgende Proposition gegeben.

Proposition 3.2.1 *Die Dichte der dem Gitter* Γ *zugehörigen Packung ist*

$$\sigma(\Gamma) = \frac{\mathrm{vol}(B_{\rho(\Gamma)})}{\mathrm{vol}(\Pi[v_1, \dots, v_n])} = \frac{\kappa_n \rho(\Gamma)^n}{\det(\Gamma)}$$

Zum Beispiel, die Standartgitter $\mathbb{Z}^n$ hat die Packungsdichte

$$\sigma(\mathbb{Z}^n) = \frac{\kappa_n}{2^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{\pi e}{2n}\right)^{\frac{n}{2}} = Ce^{\frac{-n \log n - \log n}{2}}$$

Die Suche nach einer dichten Packung kann man angesichts der letzten Proposition auf zwei verschiedene Weisen durchführen. Entweder man sucht unter den Gittern mit einer festen Determinante eines mit einem möglichst grossen Packungsradius (man versucht, den Zähler zu vergrößern), oder man nimmt die Kugeln eines festen Radius und versucht sie in ein Gitter mit möglichst kleiner Determinante einzupacken (man verkleinert den Nenner). Beide Vorgänge sind äquivalent, da die Dichte sich bei der Skalierung der Packung nicht ändert.

Die Packung im Standardgitter hat eine sehr kleine Dichte ergeben. Man kann aber beweisen, dass je höher die Dimension ist, desto schlechter lassen sich Kugeln trotz aller Mühe einpacken. Die folgende Abschätzung von oben der Dichte einer Gitterpackung in n Dimensionen wurde von Blichfeldt auf eine sehr elegante Weise bewiesen.

Satz 3.2.4 *Die Dichte jeder Gitterpackung in* $\mathbb{R}^n$ *ist nicht größer als* $\frac{n+2}{2^{\frac{n+2}{2}}}$.

Beweis Wir werden die Kugeln vom Radius 1 einpacken.

Lemma 3.2.1 *Seien* $x_1 + B, \dots, x_m + B$ *paarweise nicht überlappende Kugeln. Dann ist die Summe der Quadraten der Abstände von einem beliebigen Punkt* y *zu den Zentren* x_i *dieser Kugeln größer oder gleich* $2(m-1)$*:*

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i - y|^2 \geq 2(m-1)$$

Beweis des Lemmas OBdA ist $y = 0$, sonst verschiebt man alles so, dass y in den Koordinatenursprung gerät. Es ist also die Summe $\sum_{i=1}^m |x_i|^2$ abzuschätzen. Die Bedingung, dass die Kugeln nicht überlappen, schreibt sich als

$$\langle x_i - x_j, x_i - x_j\rangle = |x_i - x_j|^2 \geq 4$$

und nach dem Ausklammern ergibt

$$\langle x_i, x_j\rangle \leq \frac{1}{2}(|x_i|^2 + |x_j|^2 - 4)$$

Nun gilt

$$0 \leq |x_1 + \cdots + x_m|^2 = \sum_{i,j=1}^m \langle x_i, x_j\rangle = \sum_i |x_i|^2 + 2\sum_{i<j}\langle x_i, x_j\rangle \leq$$
$$\leq \sum_i |x_i|^2 + \sum_{i<j}(|x_i|^2 + |x_j|^2 - 4) = m\sum_i |x_i|^2 - 2m(m-1)$$

woraus folgt die Behauptung. □Lemma

Und jetzt ein Trick! Ersetzen wir die Kugeln durch die "materiellen" Kugeln vom Radius $\sqrt{2}$ und von einer variierenden Dichte, die im Abstand r vom Zentrum $2 - r^2$ beträgt. Die materiellen Kugeln können sich schneiden, aber die Dichte des Stoffes in jedem Punkt y des Raumes ist nicht größer als 2, wie man aus dem obigen Lemma sieht:

$$\sum_{i=1}^m (2 - |x_i - y|^2) \leq 2m - 2(m-1) = 2$$

Die Tatsache, dass nach dieser "Verbreitung des Stoffes" er immer noch eine geringe Dichte hat, erlaubt uns die Anzahl der Kugeln in einem Gebiet abzuschätzen. Betrachten wir eine Kugel B_R vom Radius R. Sei m die Anzahl der Einheitskugeln mit Zentren in Knoten des Gitters Γ, die die Kugel B_R treffen. Dann gilt für die Vereinigung X dieser Kugeln

$$\frac{\mathrm{vol}(B_R \cap X)}{\mathrm{vol}(B_R)} \leq \frac{m\kappa_n}{\kappa_n R^n} = \frac{m}{R^n}$$

Andererseits, nach dem Ersetzen von Einheitskugeln durch die materiellen vom Radius $\sqrt{2}$ wird der ganze Stoff in der Kugel $B_{R+2\sqrt{2}}$ enthalten. Da seine

Dichte in jedem Punkt höchstens 2 beträgt, ist die Gesamtmasse des Stoffes nicht größer als zweimal das Volumen der $B_{R+2\sqrt{2}}$. Das heißt,

$$mW \leq 2\kappa_n(R+2\sqrt{2})^n,$$

wobei W die Masse einer materiellen Kugel ist. Sie lässt sich wie folgt berechnen:

$$W = \int_0^{\sqrt{2}} \tau_{n-1} r^{n-1}(2-r^2)dr = \frac{\kappa_n 2^{\frac{n+4}{2}}}{n+2}$$

Somit erhalten wir aus der letzten Ungleichung die Abschätzung für den Anteil des Volumens der Einheitskugeln in B_R

$$\frac{m}{R^n} \leq \left(\frac{R+2\sqrt{2}}{R}\right)^n \frac{2\kappa_n}{W} = \left(1+\frac{2\sqrt{2}}{R}\right)^n \frac{n+2}{2^{\frac{n+2}{2}}}$$

Nach der Definition der Dichte einer Gitterpackung

$$\sigma(\Gamma) = \lim_{R\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(B_R \cap X)}{\mathrm{vol}(B_R)} \leq \frac{n+2}{2^{\frac{n+2}{2}}} \quad \square$$

Die zur Zeit beste obere Schranke für die Dichte einer Gitterpackung in $\mathbb{R}^n$ ist $2^{-0{,}599n+o(n)}$ (Kabatjanskii und Levenshtein, 1978). Was die Konstruktion einer dichten Packung angeht, werden wir in der nächsten Vorlesung zeigen, dass man die Dichte 2^{-n} erreichen kann.

Aufgaben

1) Zeigen Sie, dass der Satz von Blichfeldt auch in dem Fall gilt, wenn A kompakt und $\mathrm{vol} A \geq 1$ vorausgesetzt wird.

2) (Gleichzeitige rationale Approximation) Zeigen Sie: Für eine feste Konstante C und beliebige irrationale Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gibt es unendlich viele n-Tupel $(\frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q})$ mit der Eigenschaft

$$|\alpha_i - \frac{p_i}{q}| < \frac{C}{q^{1+\frac{1}{n}}}$$

3) Man befindet sich im Ursprung der Koordinatenebene. In jedem vom Ursprung verschiedenen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten steht ein Baum des Umfangs ε. Zeigen Sie, das man nicht durchblickt. Wie müssen die Bäume verdünnen (dem Abstand vom Ursprung nach), damit man durchblicken konnte?

4) Beweisen Sie die Proposition 13.1 aus der Vorlesung:

$$\sigma(\Gamma) = \frac{\mathrm{vol}(B_{\rho(\Gamma)})}{\mathrm{vol}(\Pi[v_1, \ldots, v_n])} = \frac{\kappa_n \rho(\Gamma)^n}{\det(\Gamma)}$$

5) (a) Finden Sie die optimale Gitterpackung in $\mathbb{R}^2$.
   (b) Konstruieren Sie möglichst dichte Gitterpackung in $\mathbb{R}^n$.

3.3 Satz von Minkowski-Hlawka und dichte Gitterpackungen

3.3.1 Packungsdichte: Stand der Dinge

Eine Packung X ist Vereinigung der Kugeln des gleichen Radius in $\mathbb{R}^n$, so dass die Inneren der Kugeln paarweise disjunkt sind. In der letzten Vorlesung haben wir die Packungsdichte als der Grenzwert des Volumenanteils der Menge X in der Kugel B_R bei $R \to \infty$ definiert. Für eine Gitterpackung $X = \bigcup_{g\in\Gamma}(g + B_\rho)$, wobei ρ die größte Kugel ist, die sich auf diese Weise einpacken lässt, ist ihre Dichte $\sigma(\Gamma)$ auch dem Verhältnis des Volumens der Kugel B_ρ zum Volumen des Fundamentalparallelepipeds des Gitters gleich.

Warum Gitterpackungen? Man kann auch Packungen betrachten, wo die Zentren der Kugeln nicht über ein Gitter verteilt sind, sondern beliebig. Die Dichte $\sigma(X)$ der Packung soll dann als der *obere Grenzwert* des Volumenanteil der Kugeln in einem großen Gebiet definiert werden (falls der übliche Grenzwert nicht existiert). Das Kepler-Problem besteht im Finden einer dichtesten (nicht unbedingt periodischen) Packung, oder mindestens im Bestimmen der maximalen Packungsdichte in $\mathbb{R}^n$. Erstaunlicherweise, $n = 2$ ist bis jetzt die einzige Dimension, wo dieses Problem gelöst wurde.

Das Problem der Bestimmung einer optimalen Gitterpackung sieht einfacher und zugänglicher aus, und ist in vielen (aber nicht in allen) Dimensionen gelöst. Es ist also gar nicht klar (sogar bei $n = 3$), ob die optimale Packungsdichte an einer Gitterpackung erreicht wird! Mit anderen Worten, wenn wir mit

$$\delta_n := \sup\{\sigma(X)|\ X \text{ eine Packung in } \mathbb{R}^n\}$$
$$\delta_n^\Gamma := \sup\{\sigma(X)|\ X \text{ eine Gitterpackung in } \mathbb{R}^n\}$$

die optimalen Packungsdichten für beliebigen bzw. für Gitterpackungen bezeichnen, dann gilt offenbar

$$\delta_n^\Gamma \leq \delta_n,$$

aber es ist nicht bekannt, ob hier für $n > 2$ das Gleichheitszeichen gilt.

Für $n = 3$ wurde es von Gauss gezeigt, dass die optimale Gitterpackung genau diejenige ist, von der man es erwartet. Der Artikel von Gauss hieß allerdings "Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen“. Der anscheinend abstrakte Begriff einer quadratischen Form hat wirklich etwas mit Packungen zu tun: Der Abstand zwischen zwei Gitterpunkten vom Gitter $\Gamma(v_1, \ldots, v_n)$ ist gleich

$$|k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n| = \sqrt{\sum_{i,j} \langle v_i, v_j \rangle k_i k_j},$$

und somit ist die Bestimmung der Packungsradius eines Gitters zur Bestimmung des minimalen Wertes einer quadratischen Form mit ganzzahligen Argumenten äquivalent.

Wie oben erwähnt, das Problem der dichtesten Packung ist noch weit von der Lösung entfernt. Wir beschäftigen uns mit Abschätzungen der Packungsdichte. In der letzten Vorlesung haben wir bewiesen, dass die Packungsdichte einer beliebigen Packung die Zahl $\frac{n+2}{2^{\frac{n+2}{2}}}$ nicht überschreiten kann. Der folgende Satz von Rogers gibt eine Abschätzung, die asymptotisch um einen konstanten Faktor $\frac{2}{e}$ besser ist.

Satz 3.3.1 *Sei 2Δ ein regulärer Simplex mit der Kantenlänge 2. Betrachte Einheitskugeln mit Zentren in Ecken von 2Δ. Dann ist die Dichte einer beliebigen Kugelpackung nicht größer als das Verhältnis des Volumenanteils der Kugeln im 2Δ zum Volumen des ganzen Simplex.*

Die beiden Abschätzungen — die von Blichfeldt und die von Rogers — geben für die optimale Dichte σ_n^0 eine asymptotische Schranke der Form

$$\delta_n \leq C \cdot 2^{-0.5n + o(n)}$$

In der Mitte der siebzigen Jahren wurde die untere Schranke verbessert auf

$$\delta_n \leq 2^{-0.599n+o(n)}$$

Das Ziel der heutigen Vorlesung ist die folgende obere Schranke zu beweisen:

$$2^{-n} \leq \delta_n^{\Gamma}$$

Es wird also gezeigt, dass es Gitterpackungen mit der Dichte nicht kleiner als 2^{-n} existieren. Das wird aber ein reiner Existenzbeweis sein, wir werden kein Rezept geben, wie man eine so dichte Packung konstruiert.

3.3.2 Satz von Minkowski-Hlawka

Der folgende Satz wurde zuerst von Minkowski als Vermutung ausgesprochen, und schließlich von Hlawka 1944 bewiesen.

Satz 3.3.2 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte messbare Menge, $n \geq 2$. Sei $D > \mathrm{vol}(A)$. Dann existiert ein Gitter Γ in $\mathbb{R}^n$ mit $\det(\Gamma) = D$ so dass die Menge A keinen Gitterpunkt von Γ, außer vielleicht dem Ursprung, enthält.*

Bemerkung Den Ursprung kann man nicht loswerden, falls er in A bereits liegt. Wir haben Freiheit bei der Wahl der Gitterbasis, aber nicht bei der Wahl der Koordinatenursprung. Mit anderen Worten, wir dürfen die Menge A nicht parallelverschieben. Falls es erlaubt wurde, dann konnte man alle Gitterpunkte loswerden, sogar bei einem festen Gitter mit der Determinante größer als das Volumen von A. Dies folgt ganz einfach aus einer direkten Verallgemeinerung des Integralsatzes am Anfang der Vorlesung 12: Die durchschnittliche Anzahl von Gitterpunkten in Translaten von A ist dem Quotient vom Volumen von A und der Determinante des Gitters gleich.

Allerdings, der Beweis des Satzes von Minkowski-Hlawka folgt derselben Idee: Wenn wir die Basis so bewegen, dass ihre Determinante stets gleich D bleibt, dann ist die Durchschnittsanzahl der Gitterpunkte dieser variablen Basis in unserer festen Menge A gleich $\frac{\mathrm{vol}(A)}{D}$.

Korollar 3.3.1 *Für jede $\sigma < 2^{-n}$ existiert ein Gitter mit der Packungsdichte größer als σ.*

Beweis Sei $A = B$ die Einheitskugel. Nach dem Satz existiert für jede Zahl $D > \kappa_n$ ein Gitter Γ mit $\det(\Gamma) = D$ und $B \cap \Gamma = \{0\}$. Aus dem letzten folgt, dass der Packungsradius von Γ nicht kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Somit gilt

$$\sigma(\Gamma) \geq \frac{\mathrm{vol}(B_{\frac{1}{2}})}{D} = \frac{\kappa_n}{2^n D}$$

Da D beliebig nah zu κ_n gewählt werden kann, kann das letzte Quotient beliebig nah zu 2^{-n} werden. Daraus folgt die Behauptung. □

Beweis des Satzes OBdA kann man $D = 1$ annehmen (Skalierung). Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$, und sei $\mathbb{R}^{n-1}$ der "waagerechte" von $e_1, \ldots, e_{n-1}$ aufgespannte Untervektorraum. Sei $\alpha > 0$. Bezeichne mit H_k die waagerechte Hyperebene auf der Höhe $k\alpha$ in $\mathbb{R}^n$, d. h. $H_k := k\alpha \cdot e_n + \mathbb{R}^{n-1}$. Betrachte die Schnitte von A:

$$A_k := A \cap H_k$$

Da A beschränkt ist, ist nur endlich viele von den Mengen A_k nichtleer. Wähle eine natürliche Zahl N so dass $A_k = \emptyset$ falls $|k| > N$ gilt (N hängt von α ab). Nun wollen wir eine Zahl α, die den folgenden Bedingungen genügt, wählen:

1) $A_0 \subset [-\alpha^{-\frac{1}{n-1}}, \alpha^{-\frac{1}{n-1}}]^{n-1}$;

2) $\sum_{k=-N}^{N} \mathrm{vol}_{n-1}(A_k) < \frac{1}{\alpha}$

Eine solche α existiert, da die beiden Bedingungen bei genügend kleinen α erfüllt werden: Die erste weil A_0 beschränkt ist, die zweite weil $\sum_{k=-N}^{N} \alpha \cdot \mathrm{vol}_{n-1}(A_k)$ eine Integralsumme für $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{vol}_{n-1}(A \cap (x \cdot e_n + \mathbb{R}^{n-1}) dx$ ist und muss deswegen bei $\alpha \to 0$ gegen $\mathrm{vol}(A) < 1$ konvergieren.

Setze $v_i := \alpha^{-\frac{1}{n-1}} \cdot e_i$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Das seien die ersten $n-1$ Basisvektoren unseres Gitters. Der n-te Vektor wird $v_n = \alpha \cdot e_n + x$, wobei $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, und wir bezeichnen

$$\Gamma_x := \Gamma(v_1, \ldots, v_{n-1}, \alpha \cdot e_n + x)$$

Somit wird die Bedingung $\det(\Gamma) = 1$ erfüllt, und es ist zu zeigen, dass der Vektor x so gewählt werden kann, dass A keine Gitterpunkte, außer vielleicht 0, enthält. Bemerke, dass alle Γ_x-Gitterpunkten in den waagerechten

Hyperebenen H_k enthalten sind, und dass die Menge A_0 keine verbotene Gitterpunkte enthält:

$$\Gamma_x \subset \bigcup_{-\infty}^{+\infty} H_k \qquad \text{und} \qquad \Gamma \cap A_0 \subset \{0\}$$

Somit besteht unsere Aufgabe darin, alle Schnitte A_k, $1 \leq |\,k| \leq N$ gleichzeitig von Gitterpunkten zu befreien.

Lemma 3.3.1 *Sei* $\Pi := [0, \alpha^{-\frac{1}{n-1}}]^{n-1}$ *das Fundamentalparallelepiped des Teilgitters* $\Gamma(v_1, \ldots, v_{n-1})$ *von* Γ_x *in* $\mathbb{R}^{n-1}$. *Bezeichne mit* G_x *die Gitterpunktezahl bezüglich des Gitters* Γ_x. *Dann gilt für jedes* $k \neq 0$:

$$\int_{\Pi} G_x(A_k)dx = \mathrm{vol}_{n-1}(A_k)$$

Beweis des Lemmas Der Durchschnitt des Gitters Γ_x mit H_k ist ein gestrecktes und parallelverschobenes $(n-1)$-dimensionales Standardgitter:

$$\Gamma_x \cap H_k = k\alpha \cdot e_n + kx + \alpha^{-\frac{1}{n-1}} \cdot \mathbb{Z}^{n-1}$$

Somit enthält A_k einen bestimmten Γ_x-Gitterpunkt genau dann, wenn das Bild von A_k under der inversen Transformation den entsprechenden Punkt des Standardgitters enthält, und es gilt folglich:

$$G_x(A_k) = G(-k\alpha^{\frac{1}{n-1}} \cdot x + \alpha^{\frac{1}{n-1}} A'_k),$$

wobei A'_k die Orthogonalprojektion von A_k auf $\mathbb{R}^{n-1}$ ist, und G die Gitterpunktezahl bezüglich des Standardgitters bedeutet. Jetzt können wir das Integral im Lemma durch einfache Substitution berechnen:

$$\int_{\Pi} G_x(A_k)dx = \int_{\Pi} G(-k\alpha^{\frac{1}{n-1}} \cdot x + \alpha^{\frac{1}{n-1}} A'_k)dx =$$
$$= \int_{[0,k]^{n-1}} G(-y + \alpha^{\frac{1}{n-1}} A'_k)\frac{dy}{k^{n-1}\alpha} = \frac{1}{\alpha}\mathrm{vol}_{n-1}(\alpha^{\frac{1}{n-1}} A'_k) =$$
$$= \mathrm{vol}_{n-1}(A_k)$$

Hier haben wir eine aus der Proposition 12.1 einfach folgende Gleichung benutzt:

$$\int_{[0,k]^n} G(-y + A)dy = k^n \mathrm{vol}(A) \qquad \Box\text{Lemma}$$

Aus dem Lemma folgt:

$$\int_\Pi \sum_{k\neq 0} G_x(A_k)dx = \sum_{k\neq 0} \mathrm{vol}_{n-1}(A_k) < \frac{1}{\alpha},$$

und, weil A_0 von den Gitterpunkten nur eventuell den Ursprung enthält,

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(\Pi)} \int_\Pi (G_x(A) - \mathbf{1}_A(0))dx < 1$$

Folglich existiert ein $x \in \Pi$ so dass $G_x(A) - \mathbf{1}_A(0) = 0$ gilt, und das heißt, dass die Menge A keine Γ_x-Gitterpunkte, außer vielleicht 0, enthält. □Satz

Aufgaben

1) (a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine zentralsymmetrische beschränkte messbare Menge, $n \geq 2$. Sei $D > \frac{1}{2}\mathrm{vol}(A)$. Dann existiert ein Gitter Γ in $\mathbb{R}^n$ mit $\det(\Gamma) = D$ so dass die Menge A keinen Gitterpunkt von Γ, außer vielleicht dem Ursprung, enthält.

   (b) Wie verbessert sich dadurch die untere Schranke für die optimale Packungsdichte?

2) (a) Sei Γ ein Gitter mit $\det(\Gamma) = 1$. Zeigen Sie, dass für den Packungsradius von Γ gilt:

$$\rho(\Gamma) \leq \sqrt{\frac{n}{4\pi e}}(1 + O(\frac{1}{n}))$$

   (b) Zeigen Sie: Für jede n existiert ein Gitter Γ mit der Determinante 1 und

$$\rho(\Gamma) \geq \sqrt{\frac{n}{8\pi e}}(1 + O(\frac{1}{n}))$$

3) Beweisen Sie den Satz von Ehrhart für Gitterpolygone (Gitterpolytope in $\mathbb{R}^2$).

4) Beweisen Sie den Satz von Ehrhart für Parallelepipede.

Hinweise

1) Bemerke, dass eine zentralsymmetrische Menge entweder keinen von Null verschiedenen Punkt enthält, oder mindestens zwei.
3) Die Formel von Pick kann helfen.

3.4 Polynom von Ehrhart

Ein eleganter Satz von Ehrhart besagt, dass die Gitterpunktezahl eines gestrecktes Gitterpolytops ist ein Polynom bezüglich des Skalierungskoeffizients (das eine natürliche Zahl sein muss). Wir kehren jetzt zurück zum Standardgitter $\mathbb{Z}^n$ und meinen es immer unter "dem Gitter".

3.4.1 Der Satz und Beispiele

Satz 3.4.1 *Sei P ein Gitterpolytop in $\mathbb{R}^n$. Dann ist $G(kP)$ ein Polynom in k für $k \in \mathbb{Z}_+$.*

Beispiele
1) Sei $P = [0,1]^n$. Dann ist $kP = [0,t]^n$ und $G(kP) = (k+1)^n$.
2) Sei $P = \mathrm{conv}((0,0),(1,0),(0,1)) \subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$G(kP) = 1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

3.4.2 Erzeugende Funktion eines einfachen rationalen Kegels

Die Hauptidee des Beweises ist es, jeder Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ eine Potenzreihe zuzuordnen, deren Glieder den Gitterpunkten entsprechen.

Definition 3.4.1 *Sei $g = (g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{Z}^n$ ein Gitterpunkt. Mit x^g bezeichnen wir das Monom $x_1^{g_1} \cdots x_n^{g_n}$. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge. Die der Menge A entsprechende erzeugende Funktion ist eine formale Potenzreihe in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$*

$$f(A;x) = \sum_{g \in A} x^g$$

Bemerke, dass in Monomen auch negative Potenzen zugelassen sind. Als Polynom werden wir eine Summe von endlich vielen Monomen bezeichnen. Falls die Menge A beschränkt ist, ist die Summe $f(A;x)$ ein Polynom und es gilt

$$f(A;1) = G(A),$$

wobei $1 = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$.

Wenn $f(A;x)$ eine unendliche Summe ist, darf man äquivalente Umformungen auf sie anwenden ohne sich mit der Frage der Konvergenz zu befassen (deswegen sagt man "formale Potenzreihe"). Als Beispiel betrachten wir die erzeugende Funktion des Orthantes $[0,+\infty)^n$:

$$f([0,\infty)^n) = \sum_{g_i \geq 0} x_1^{g_1} \cdots x_n^{g_n} = \prod_{i=1}^{n} \sum_{g_i=0}^{\infty} x_i^{g_i} = \frac{1}{(1-x_1)\cdots(1-x_n)}$$

Im Allgemeinen sind die Mulitplikation und die Division für Potenzreihen mit beliebigen ganzzahligen Exponenten nicht wohldefiniert. Wir werden aber nur mit solchen Situationen zu tun haben, wo es funktioniert. Insbesondere, man kann zwei Reihen mit positiven Exponenten multiplizieren, eine beliebige Reihe mit einem Polynom multiplizieren oder durch ein Polynom teilen.

Noch ein Paar Definitionen. Man definiert die positive Hülle einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ als

$$\mathrm{pos}(A) := \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m | \ \lambda_i \geq 0, a_i \in A, m \in \mathbb{N}\}$$

Falls $C = \mathrm{pos}(A)$ für ein A gilt, dann heißt die Menge C ein *Kegel*. Beachte, dass jeder Kegel konvex ist.

Definition 3.4.2 *Die positive Hülle eines linearunabhängigen Systems ganzzahliger Vektoren heißt ein einfacher rationaler Kegel.*

Manche Potenzreihen verhalten sich vernünftig und heißen deswegen rational.

Definition 3.4.3 *Eine formale Potenzreihe heißt rational, falls sie als Quotient zweier Polynome geschrieben werden kann.*

Ein exemplarisches Beispiel einer rationalen Potenzreihe ist die geometrische Reihe

$$1 + ax + a^2x^2 + \cdots = \frac{1}{1-ax}$$

Dass nicht jede Potenzreihe rational ist, kann man mit analytischen Verfahren zeigen. Zum Beispiel darf eine solche Reihe in ihrem Konvergenzbereich nur endlich viele Nullstellen haben.

Satz 3.4.2 *Die erzeugende Funktion eines einfachen rationalen Kegels C ist rational. Falls $C = \mathrm{pos}(v_1, \ldots, v_p)$ mit linearunabhängigen ganzzahligen $v_1, \ldots, v_p$ gilt, dann gilt*

$$f(C; x) = \frac{f(\Pi; x)}{(1 - x^{v_1}) \cdots (1 - x^{v_p})},$$

wobei $\Pi = \Pi[v_1, \ldots, v_p) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p |\ \lambda_i \in [0, 1)\}$ das von rechts offene Parallelepiped ist.

Beweis Die Parallelverschiebungen von Π um Linearkombinationen von Vektoren $v_1, \ldots, v_p$ mit ganzen nichtnegativen Koeffizienten überdecken den ganzen Kegel C einfach. Insbesondere, jeder Punkt $g \in C \cap \mathbb{Z}^n$ hat eine eindeutige Darstellung in der Form

$$g = h + k_1 v_1 + \cdots + k_p v_p,$$

wobei $h \in \Pi \cap \mathbb{Z}^n$ und $k_i \in \mathbb{Z}_+$ gilt. Somit erhalten wir

$$\sum_{g \in C} x^g = \sum_{h,\, k_i} x^{h + k_1 v_1 + \cdots + k_p v_p} = \sum_{h \in \Pi} x^h \cdot \sum_{k_i \geq 0} x^{k_1 v_1 + \cdots + k_p v_p} =$$

$$= f(\Pi; x) \cdot \prod_{i=1}^{p} \sum_{k_i \geq 0} x^{k_i v_i} = \frac{f(\Pi; x)}{(1 - x^{v_1}) \cdots (1 - x^{v_p})} \quad \square$$

Der Schnitt $\mathbb{Z}^n \cap \mathrm{aff}(v_1, \ldots, v_p)$ ist ein Gitter im p-dimensionalen euklidischen Raum $L = \mathrm{aff}(v_1, \ldots, v_p)$. Falls die Vektoren $v_1, \ldots, v_p$ eine Basis dieses Gitters bilden, also falls $\mathbb{Z}^n \cap L = \Gamma(v_1, \ldots, v_p)$ gilt, dann enthält das Parallelepiped Π einen einzigen Gitterpunkt 0. In diesem Fall hat die erzeugende Funktion des Kegels C eine besonders einfache Form $\frac{1}{(1-x^{v_1})\cdots(1-x^{v_p})}$. Aber es ist nicht immer möglich, eine Basis des Gitters $\mathbb{Z}^n \cap L$ so zu wählen, dass dazu noch ihre positive Hülle genau der Kegel C wäre. Ein Beispiel: $C = \mathrm{pos}((2, 1), (1, 2)) \subset \mathbb{R}^2$.

3.4.3 Polynom von Ehrhart: Fall des Simplex

Hier beweisen wir den Satz von Ehrhart im speziellen Fall, wo $P = \Delta$ ein Simplex ist.

Sei $\Delta = \operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_p)$ ein $(p-1)$-dimensionaler Simplex mit Ecken in Gitterpunkten $v_1, \ldots, v_p$. Zusätzlich zu unseren n Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ führen wir die $(n+1)$-te Koordinate t und betrachten den Kegel

$$C := \operatorname{pos}((v_1, 1), \ldots, (v_p, 1))$$

in $\mathbb{R}^{n+1}$. Da die Punkte $v_1, \ldots, v_p$ affin unabhängig sind, sind die Punkte $(v_1, 1), \ldots, (v_p, 1)$ linear unabhängig, und C ist ein einfacher rationaler Kegel. Die erzeugende Funktion $f(C; x, t)$ des Kegels C ist eine Potenzreihe in $n+1$ Variablen $x_1, \ldots, x_n, t$. Und in dieser Potenzreihe ist eine für uns sehr wichtige Information enthalten:

Lemma 3.4.1 *Es gilt*

$$f(C; x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta; x) t^k$$

Beweis In einer positiven Linearkombination von Vektoren $(v_1, 1), \ldots, (v_p, 1)$ spürt die letzte Koordinate die Summe von Koeffizienten auf. Daraus folgt ziemlich einfach eine alternative Beschreibung des Kegels C:

$$C = \{(x, t) |\ x \in t\Delta, t \geq 0\}$$

Nun liegt ein Gitterpunkt (g, k) in C genau dann, wenn $k \geq 0$ und $g \in k\Delta$ gilt. Daraus folgt

$$f(C; x, t) = \sum_{(g,k) \in C} x^g t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{g \in k\Delta} x^g \right) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta; x) t^k \quad \Box$$

Die Einsetzung $x = (1, \ldots, 1)$ ergibt uns

Korollar 3.4.1 *Es gilt*

$$f(C; 1, t) = \sum_{k=0}^{\infty} G(k\Delta) t^k$$

Untersuchen wir die Funktion $f(C; x, t)$ mit Hilfe des Satzes 3.4.2.

Lemma 3.4.2 *Es gilt*

$$f(C; 1, t) = \frac{h(t)}{(1-t)^p},$$

wobei h ein Polynom vom Grad $\deg h < p$ *ist.*

Beweis Nach dem Satz 3.4.2 gilt

$$f(C; x, t) = \frac{f(\Pi; x, t)}{(1 - x^{v_1} t) \cdots (1 - x^{v_p} t)},$$

mit $\Pi = \Pi[(v_1, 1), \ldots, (v_p, 1))$. Die Einsetzung $x = 1$ ergibt im Nenner das Polynom $(1-t)^p$, wie gewünscht. Schauen wir uns an, welche Potenzen von t im Polynom $f(\Pi; x, t)$ vorkommen können. Das heißt, welche Werte kann die t-Koordinate eines Gitterpunktes in Π annehmen. Nach der Definition gilt $\Pi = \{(\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^p \lambda_i) |\ \lambda_i \in [0, 1)\}$ Folglich, ist die t-Koordinate im ganzen Π nichtnegativ und echt kleiner als p. Somit wird das Polynom $f(\Pi; x, t)$ nach der Einsetzung von 1 für x zu einem Polynom in t vom Grad kleiner als p. □

Um den Beweis des Satzes von Ehrhart im Falle eines Simplex zu vollenden, genügt jetzt die folgende Lemma zu zeigen.

Lemma 3.4.3 *In der Potenzreihe*

$$\frac{h(t)}{(1-t)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

mit $\deg h < p$ *hängt das Koeffizient a_k polynomiell von k.*

Beweis Befassen wir uns zuerst mit dem Nenner allein. Wir benutzen dazu binomischer Lehrsatz, der für eine negative Exponente genauso gilt, wie für eine positive. Beachte:

$$\binom{-p}{k} = \frac{-p(-p-1)\cdots(-p-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{(p+k-1)\cdots(p+1)p}{k!} =$$
$$= (-1)^k \binom{p+k-1}{k} = (-1)^k \binom{p+k-1}{p-1}$$

Folglich gilt

$$(1-t)^{-p} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-p}{k} (-t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p+k-1}{p-1} t^k$$

Dabei ist $\binom{p+k-1}{p-1}$ Polynom in k vom Grad $p-1$, und somit ist unsere Behauptung für $h(t) = \text{const}$ bereits bewiesen. Was passiert nun, wenn wir unsere schöne Reihe mit einem Polynom multiplizieren? Sei $l < p$. Dann gilt

$$t^l(1-t)^{-p} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p+k-1}{p-1} t^{l+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p+k-1-l}{p-1} t^k, \qquad (*)$$

und $\binom{p+k-1-l}{p-1}$ ist wiederum ein Polynom in k. Da $h(t)$ eine Linearkombination von t^l, $l < p$ ist, sind die Koeffizienten der Entwicklung von $h(t)(1-t)^{-p}$ ebenfalls Werte eines Polynoms, und die Behauptung ist bewiesen. $\square$ (Gut, aber wo haben wir die Bedingung $l < p$ benutzt?)

Einerseits ist die Bedingung $\deg(h) < p$ notwendig, wie es einfache Beispiele zeigen. Andererseits ist es nicht gerade klar, wo wir sie benutzt haben. Beachte aber, dass die letzte Gleichheit in (*) wirklich nur bei $l < p$ gilt. Ohne jede Bedingung auf den Grad von h ist a_k ein Polynom in k erst ab einer bestimmten Stelle.

3.4.4 Polynom von Ehrhart: Allgemeiner Fall

Wir übertragen den Satz von Ehrhart vom Fall eines Simplex auf den Fall eines beliebiges Polytops mit Hilfe der Triangulierung.

Definition 3.4.4 *Eine Triangulierung von $A \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Darstellung von A in der Form $A = \bigcup_{i=1}^m \Delta_i$, wobei Δ_i für jedes i ein Simplex und $\Delta_i \cap \Delta_j$ für alle i, j Seite von beiden Simplexe Δ_i und Δ_j ist.*

Insbesondere ist jeder Durchschnitt $\Delta_i \cap \Delta_j$ wiederum ein Simplex. Außerdem, ist der Durchschnitt einer beliebiger Anzahl von Simplexen der Triangulierung Seite jeder von geschnittenen Simplexen (zeigen Sie es!).

Beispiel Sei P ein simpliziales Polytop. Dann bilden die Facetten von P eine Triangulierung des Randes von P.

Bemerkungen 1) Falls V_i die Eckenmenge des Simplex Δ_i ist, dann sind die Seiten von Δ_i die konvexen Hüllen von Teilmengen von V_i. Deswegen gilt $\Delta_i \cap \Delta_j = \mathrm{conv}(V_i \cap V_j)$. Das heißt, die kombinatorische Struktur einer Triangulierung kann durch die folgenden Daten angegeben werden: eine Punktmenge und ausgezeichneten Teilmengen, die die Simplexe der Triangulierung aufspannen. Üblicherweise fügt man auch alle Teilmengen der ausgezeichneten Teilmengen (also Eckenmengen aller Seiten) hinzu. Ein solches Objekt — eine bezüglich der Inklusion abgeschlossene Kollektion von Teilmengen — heißt ein Simplizialkomplex. Der aus einer Triangulierung von A hervorgehende Simplizialkomplex abstrahiert von der Geometrie von A, trägt aber ganz wesentlichen Informationen. Insbesondere kann anhand von ihm die Eulercharakteristik von A berechnet werden (wie? eine Übung, vgl. die Aufgabe 11.4)

2) Eine Triangulierung kann (und muss) aus unendlich vielen Simplexen bestehen, falls A nicht kompakt ist. Bei unendlichen Triangulierungen soll aber eine weitere Bedingung erfüllt werden, die ungefähr sagt, dass die Simplexe keine Häufungspunkte innerhalb A haben dürfen.

Das waren nur Nebenbemerkungen, da wir uns mit Triangulierungen von kompakten Mengen beschäftigen, und nicht einen abstrakten Simplizialkomplex, sondern eine richtige Triangulierung betrachten werden.

Satz 3.4.3 *Jedes Polytop besitzt eine Triangulierung.*

Beweis Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop. OBdA gilt $\dim P = n$. Falls P ein Simplex ist, so haben wir eine triviale Triangulierung. Sei P kein Simplex, somit habe P mehr als $n+1$ Ecken. Dann kann man die Ecken von P in den Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ so liften, dass sie ein $(n+1)$-dimensionales simpliziales Polytop $\widetilde{P}$ aufspannen. (Damit der Lift wirklich ein simpliziales Polytop war, genügt es, die Bilder von Ecken affin unabhängig zu wählen. Dann wird ihre konvexe Hülle auch bestimmt $(n+1)$-dimensional.) Nun betrachten wir die Projektion $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$. Man kann zeigen, dass $\mathrm{pr}^{-1}(x) \cap \widetilde{P}$ bei $x \in P$ eine Strecke ist, wobei diese Strecke in einen Punkt genau dann ausartet, wenn $x \in \partial P$. Bezeichnen wir mit $\widetilde{P}_+$ die "obere Schale" von $\widetilde{P}$, d. h. die Menge der oberen Endpunkten von Strecken $\mathrm{pr}^{-1}(x)$, $x \in P$. Man sieht sofort, dass $\widetilde{P}_+ \subset \partial\widetilde{P}$ gilt. Außerdem, es ist einfach zu zeigen, dass $\widetilde{P}_+$ die Vereinigung aller Facetten von $\widetilde{P}$ mit einer positiven letzten Komponente der äußeren Normale ist. Folglich ist $\widetilde{P}_+$ durch diese Facetten trianguliert. Die Einschränkung $\mathrm{pr} : \widetilde{P}_+ \to P$ ist bijektiv und bildet jede Seite von $\widetilde{P}_+$ affin in $\mathbb{R}^n$. Somit stellen die Projektionen von "nach oben schauenden" Facetten von $\widetilde{P}$ eine Triangulierung von P dar. □

Beweis des Satzes 15.1 — Fortsetzung Betrachten wir eine beliebige Triangulierung vom Polytop P:

$$P = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i$$

Dann gilt auch

$$kP = \bigcup_{i=1}^{m} k\Delta_i$$

Da die Gitterpunktezahl eine Valuation ist, gilt für sie die Inklusion-Exklusion Formel:

$$\begin{aligned} G(kP) = \sum_{i=1}^{m} G(k\Delta_i) \; - \sum_{1 \le i < j \le m} G(k\Delta_i \cap k\Delta_j) + \cdots \\ \cdots + (-1)^{s-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_s \le m} G(k\Delta_{i_1} \cap \cdots \cap k\Delta_{i_s}) + \cdots \end{aligned}$$

Ferner, es gilt $k\Delta_{i_1} \cap \cdots \cap k\Delta_{i_s} = k(\Delta_{i_1} \cap \cdots \cap \Delta_{i_s})$, und $\Delta_{i_1} \cap \cdots \cap \Delta_{i_s}$ ist ein Simplex (siehe den Absatz gleich nach der Definition 3.4.4). Folglich ist jedes $G(k\Delta_{i_1} \cap \cdots \cap k\Delta_{i_s})$ und somit auch $G(kP)$ ein Polynom in k für $k \geq 0$. $\square$

Proposition 3.4.1 *Das Polynom von Ehrhart hat folgende Eigenschaften.*

1) *Der Grad des Polynoms von Ehrhart ist gleich der Dimension des Polytops:*

$$\deg G(kP) = \dim(P)$$

2) *Der Koeffizient bei dem Term des n-ten Grades in $G(kP)$ ist gleich dem (n-dimensionalen) Volumen von P, der konstante Term ist gleich 1: Sei $G(kP) = a_n k^n + \cdots + a_1 k + a_0$, dann gilt:*

$$a_n = \mathrm{vol}_n(P) \qquad\qquad a_0 = 1$$

Beweis Um den ersten Punkt zu zeigen, folgen wir sorgfältig dem Beweis des Satzes von Ehrhart. Kehren wir zurück zum Abschnitt 15.3. Sei Δ ein

$(p-1)$-dimensionale Simplex in $\mathbb{R}^n$ (mit Ecken in Gitterpunkten). Mit dem Korollar 15.1 und Lemma 15.2 haben wir gezeigt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} G(k\Delta)t^k = \frac{h(t)}{(1-t)^p}$$

Dabei sind alle Koeffizienten des Polynoms $h(t)$ nichtnegativ, weil es aus der erzeugenden Funktion eines Parallelepipeds hervorgeht. Folglich, dort, wo wir das Koeffizient bei t^k in der Entwicklung von $\frac{h(t)}{(1-t)^p}$ berechnen (Lemma 15.3), addieren wir Polynome vom Grad $p-1$ mit positiven Koeffizienten bei k^{p-1}. Somit gilt $\deg G(k\Delta) = \dim \Delta$ für ein Simplex beliebiger Dimension. Jetzt gehen wir zur Inklusion-Exklusion Formel. Dort addieren wir zuerst Ehrhart-Polynome von Simplexen der Triangulierung. Dabei entsteht ein Polynom vom Grad $\dim P$. Alle weitere Simplexe der Form $\Delta_{i_1} \cap \cdots \cap \Delta_{i_s}$, Ehrhart-Polynome von denen wir anschliessend addieren/subtrahieren müssen, haben Dimension kleiner als $\dim P$. Somit haben sie keine Auswirkung auf den bereits entstandenen Koeffizient bei $k^{\dim P}$.

Zum zweiten Punkt der Proposition. Die Gleichheit $a_0 = 1$ gilt ganz einfach weil bei $k = 0$ wir $0 \cdot P = \{0\}$ und $a_0 = G(0 \cdot P) = 1$ haben. Bestimmen wir jetzt den Koeffizient bei k^n in $G(kP)$. Es gilt, wie bei jedem Polynom,

$$a_n = \lim_{k\to\infty} \frac{G(kP)}{k^n}$$

Wenden wir jetzt die Proposition 12.2 an. Sie ergibt uns nach der Division durch k^n:

$$\mathrm{vol}(P - \frac{\sqrt{n}}{2k}B) \leq \frac{G(kP)}{k^n} \leq \mathrm{vol}(P + \frac{\sqrt{n}}{2k}B)$$

Jetzt gehen wir wie beim Beweis des Satzes 12.1 vor. Die obere Schranke konvergiert gegen $\mathrm{vol}(P)$, da $P - \frac{\sqrt{n}}{2k}B$ in der Hausdorff-Metrik gegen P konvergiert. Und für die untere Schranke gilt:

$$\mathrm{vol}(P - \frac{\sqrt{n}}{2k}B) \geq \mathrm{vol}(P) - \frac{\sqrt{n}}{2k}\mathrm{area}(\partial P)$$

Die letzte Größe konvergiert gegen $\mathrm{vol}(P)$ und deswegen tut $\frac{G(kP)}{k^n}$ dasselbe. $\square$

Eine etwas unerwartete Folgerung: man kann das Volumen eines Gitterpolytops anhand weniger Werte seines Ehrhart-Polynoms bestimmen. Und zwar, jedes Polynom vom Grad nicht größer als n ist durch seine Werte in $n+1$ beliebigen Punkten festgelegt. Da uns der Wert bei $k=0$ bereits bekannt ist, genügt es, die Gitterpunktezahl in Polytopen $P, 2P, \ldots, nP$ zu wissen, um das Volumen von P zu finden.

3.4.5 Reziprozitätsgesetz für das Ehrhart-Polynom

Bezeichnen wir mit E_P das Ehrhart-Polynom des Polytops P. Es gilt also $E_P(k) = G(kP)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}_+$. Es stellt sich heraus, dass die Werte des Polynoms E_P auf negativen ganzen Zahlen ebenfalls eine klare Bedeutung haben.

Satz 3.4.4 *Der Wert des Ehrhart-Polynoms auf einer negativen ganzen Zahl ist bis auf einem Vorzeichen gleich der Gitterpunktezahl im (relativen) Inneren des entsprechend skalierten Polytops:*

$$E_P(-k) = (-1)^{\dim P} G(\operatorname{int} kP)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}, k < 0$.

Zum Beispiel, das Ehrhart-Polynom des Einheitwürfels $[0,1]^n$ ist $E_{[0,1]^n}(k) = (k+1)^n$. Nun gilt $E_{[0,1]^n}(-k) = (-k+1)^n = (-1)^n(k-1)^n = (-1)^n G((0,k)^n)$.

Wie beim Beweis des Satzes von Ehrhart, fangen wir mit einem einfachen rationalen Kegel.

Lemma 3.4.4 *Sei $C = \operatorname{pos}(v_1, \ldots, v_p)$ ein einfacher rationaler Kegel. Dann gilt für die erzeugende Funktion seines relativen Inneres:*

$$f(\operatorname{int} C; x) = (-1)^p f(C; x^{-1})$$

Beweis Bezeichne mit $\overrightarrow{\Pi}$ das nach rechts offene Parallelepiped $\Pi[v_1, \ldots, v_p)$, mit $\overleftarrow{\Pi}$ das nach links offene Parallelepiped $\Pi(v_1, \ldots, v_p]$. Man sieht, dass die Translaten von $\overleftarrow{\Pi}$ um Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_p$ mit nichtnegativen ganzen Koeffizienten die Menge $\operatorname{int} C$ einfach überdecken. Daraus folgt (vgl. den Satz 15.2):

$$f(\operatorname{int} C; x) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n \cap \overleftarrow{\Pi}} x^h \cdot \sum_{k_i \geq 0} x^{k_1 v_1 + \cdots + k_p v_p} = \frac{f(\overleftarrow{\Pi}; x)}{(1 - x^{v_1}) \cdots (1 - x^{v_p})}$$

Jetzt bezeichne $v := v_1 + \cdots + v_p$ und betrachte die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto v - x$. Das ist die Zentralsymmetrie bezüglich des Zentrum von Parallelepiped Π. Sie bildet das Gitter $\mathbb{Z}^n$ bijektiv auf sich selbst, weil v ein Gitterpunkt ist. Ferner, bildet sie $\overleftarrow{\Pi}$ auf $\overrightarrow{\Pi}$. Daraus folgt:

$$f(\overleftarrow{\Pi}; x) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n \cap \overrightarrow{\Pi}} x^{v-g} = x^v \cdot \sum_{g \in \overrightarrow{\Pi}} x^{-g} = x^v \cdot f(\overrightarrow{\Pi}; x^{-1})$$

In die vorherige Gleichung eingesetzt, ergibt es uns

$$f(\mathrm{int}C; x) = \frac{x^v \cdot f(\overrightarrow{\Pi}; x^{-1})}{(1 - x^{v_1}) \cdots (1 - x^{v_p})} = \frac{f(\overrightarrow{\Pi}; x^{-1})}{(x^{-v_1} - 1) \cdots (x^{-v_p} - 1)} =$$
$$= (-1)^p \frac{f(\overrightarrow{\Pi}; x^{-1})}{(1 - x^{-v_1}) \cdots (1 - x^{-v_p})} = (-1)^p f(C; x^{-1}) \quad \square$$

Obwohl dieser Beweis ziemlich überzeugend wirkt, sieht man beim näheren Betrachten die folgende komische Sache. Die Reihen $f(C; x)$ und $(-1)^p f(\mathrm{int}C; x^{-1})$ bestehen aus völlig unterschiedlichen Summanden: wenn ein Monom in einer Reihe vorhanden ist, tauch es in der anderen gar nicht auf. (Betrachte, zum Beispiel, den positiven Orthant $[0, +\infty)^n$ als C.) In welchem Sinn sind dann diese Reihen gleich? Da wir die Fragen der Konvergenz verworfen haben, sollen wir formell vorgehen. Wir geben die folgende Definition der Gleichheit für unsere formalen Reihen.

Definition 3.4.5 *Wir nennen zwei Reihen gleich, wenn sie nach der Multiplikation mit einem Polynom komponenteweise gleich werden.*

Man überzeugt sich, dass der Beweis des Lemmas die Gleichheit genau in diesem Sinn liefert.

Aus dieser Definition folgt zum Beispiel $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^k = 0$, da die Reihe nach der Multiplikation mit $1 - x$ verschwindet. Aber in bestimmten Fällen kann man von unserer Gleichheitsrelation auch auf die Gleichheit von Koeffizienten schließen. Insbesondere, eine “nur in einer Richtung unendliche“ Reihe in einer Variablen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist gleich Null genau dann, wenn alle ihre Koeffizienten verschwinden (prüfen Sie es nach!) Und es ist gut so. Sonst konnten wir die Koeffizienten der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} G(k\Delta) t^k$ mit etwas bestimmtes überhaupt nicht identifizieren.

Lemma 3.4.5 *Eine Reihe $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k t^k$, deren Koeffizienten polynomiell von k abhängen, ist gleich Null.*

Beweis Multiplizieren wir die gegebene Reihe mit $1-t$:

$$(1-t)\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k t^k = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k t^k$$

Dann gilt $b_k = a_k - a_{k-1}$ und somit ist b_k ein Polynom in k, dessen Grad um 1 kleiner ist als der Grad von a_k. Folglich, für $m = \deg a_k$ gilt

$$(1-t)^{m+1}\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k t^k = 0$$

und nach der Definition gilt $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k t^k = 0$. $\square$

Beweis des Satzes 3.4.4 Zuerst beweisen wir den Reziprozitätsgesetz für einen Simplex. Sei $\Delta = \mathrm{conv}(v_1, \dots, v_p)$ ein $(p-1)$-dimensionaler Simplex, und sei $C = \mathrm{pos}((v_1, 1), \dots, (v_p, 1))$ der zugehörige einfacher rationaler Kegel in $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann, analog zum Lemma 15.1 und Korollar 15.1 haben wir

$$f(\mathrm{int}C; 1, t) = \sum_{k=1}^{\infty} G(\mathrm{int}k\Delta)t^k$$

Aus dem Lemma 3.4.4 wissen wir:

$$f(\mathrm{int}C; 1, t) = (-1)^p f(C; 1, t^{-1})$$

Somit gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} G(\mathrm{int}k\Delta)t^k = (-1)^p \sum_{k=0}^{\infty} G(k\Delta)t^{-k}$$

Nach dem Satz von Ehrhart gilt $G(k\Delta) = E_\Delta(k)$ für $k \geq 0$. Dabei ist E_Δ ein Polynom, und wegen des Lemmas 3.4.5 gilt $\sum_{-\infty}^{+\infty} E_\Delta(k)t^k = 0$. Durch Trennung der negativen und nichtnegativen Exponenten und Umkehrung des Vorzeichens des Index erhält man daraus:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} E_\Delta(k)t^{-k} = -\sum_{k=1}^{+\infty} E_\Delta(-k)t^k$$

Aus dieser und der vorherigen Gleichung erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} G(\mathrm{int} k\Delta)t^k = (-1)^{\dim \Delta} \sum_{k=1}^{+\infty} E_\Delta(-k)t^k$$

Aus dem Koeffizientenvergleich (der in dieser Situation legitim ist, siehe Anmerkung nach der Definition 3.4.5) ergibt sich die Behauptung.

Für die Übertragung der Behauptung auf beliebige Polytope triangulieren wir P und betrachten die Zerlegung von P in relative Inneren von Simplexen:

$$P = \bigsqcup_{i=1}^{M} \Delta_i$$

(Hier, im Gegenteil zur Darstellung im Abschnitt 14.4, ist $\{\Delta_i\}_1^M$ die Familie *aller* Seiten der Simplexen der Triangulierung. Dann liegt jeder Punkt von P im relativen Inneren genau einer Seite, daraus die Zerlegung.) Folglich,

$$E_P(k) = G(kP) = \sum_{i=1}^{M} G(\mathrm{int} k\Delta_i) = \sum_{i=1}^{M} (-1)^{\dim \Delta_i} E_{\Delta_i}(-k)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}_+$. Da aber auf beiden Seiten der Gleichheit Polynome stehen, gilt sie für alle k. Andererseits gilt

$$\mathbf{1}_{\mathrm{int} P} = \sum_{i=1}^{M} (-1)^{\dim \Delta_i} \mathbf{1}_{\Delta_i}$$

(das benutzen wir ohne Beweis; überzeugen Sie sich aber, das diese Gleichheit bei $n = 2$ und $n = 3$ gilt). Daraus folgt

$$G(\mathrm{int} kP) = \sum_{i=1}^{M} (-1)^{\dim \Delta_i} G(k\Delta_i) = \sum_{i=1}^{M} (-1)^{\dim \Delta_i} E_{\Delta_i}(k) = E_P(-k),$$

wobei die letzte Gleichheit aus der oben bewiesenen durch Einsetzen $-k$ statt k folgt. □

Kommentare

Eine Verallgemeinerung der Formel von Pick auf höhere Dimensionen (die aber nur für bestimmte Klassen von Körpern gilt) findet man in [1]. Im Buch

[8] werden die Sätze über Summen von zwei und von vier Quadraten behandelt. Dort findet man auch vieles über Packungen. Das Polynom von Ehrhart ist in folgenden zwei Bücher ausführlich dargestellt: [10] (kombinatorisch ausgerichtet) und [1] (mehr Analysis).

Klausur

1) Seien K und L konvexe Körper in $\mathbb{R}^n$ mit $\dim K = \dim L = n$.

   (a) Nehmen wir an: Für jeden n-dimensionalen Simplex $\Delta \subset K$ existiert $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $x+\Delta \subset L$. Zeigen Sie: Dann existiert $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x + K \subset L$.

   (b) Nehmen wir an: Für jeden n-dimensionalen Simplex $\Delta \supset L$ existiert $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $x + K \subset \Delta$. Zeigen Sie: Dann existiert $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x + K \subset L$.

2) Für konvexe Körper K und L bestimmen Sie die Stützfunktion von $K \cap L$ anhand der Stützfunktionen von K und L.

3) Eine Matrix heißt *doppelstochastisch*, falls alle ihre Einträge nichtnegativ sind und Summen über jede Zeile und über jede Spalte gleich 1 sind. Bezeichnen wir mit Ω_n die Menge aller doppelstochastischen $n \times n$ Matrizen:

$$\Omega_n := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} |\ a_{ij} \geq 0 \text{ für alle } i,j;\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \text{ für alle } j;\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \text{ für alle } i\}$$

   (a) Zeigen Sie: Die Menge Ω_n ist ein konvexes Polytop in $\mathbb{R}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ (als Birkhoff-Polytop bekannt). Bestimmen Sie die Dimension des Birkhoff-Polytops.

   (b) Für jede Permutation σ aus der symmetrischen Gruppe S_n bezeichne mit $A_\sigma = (a^\sigma_{ij})$ die $n \times n$ Matrix mit Einträgen 0 und 1 definiert als:

$$a^\sigma_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma(i) = j; \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   Die Matrix A_σ heißt die der Permutation σ zugehörige *Permutationsmatrix*. Sie liegt offenbar in Ω_n. Zeigen Sie: jede Permutationsmatrix ist eine Ecke des Birkhoff-Polytops.

(c) Zeigen Sie:
$$\Omega_n = \mathrm{conv}\{A_\sigma |\ \sigma \in S_n\}$$
Somit ist die Menge der Permutationsmatrizen genau die Eckenmenge des Birkhoff-Polytops.

4) Seien P und Q Polytope in $\mathbb{R}^n$ mit $P \cap Q \neq \emptyset$. Zeigen Sie: es existieren Seiten F von P und G von Q mit $\dim F + \dim G \leq n$ und $F \cap G \neq \emptyset$.

5) Sei Δ ein Dreieck, ∇ das zu ihm symmetrische. Bestimmen Sie das gemischte Volumen $\mathrm{vol}(\Delta, \nabla)$.

6) Sei Q ein Würfel mit der Inkugel B. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige den Würfel treffende Gerade auch die Kugel trifft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die a) 3-dimensionalen Würfel und Kugel; b) 10-dimensionalen Würfel und Kugel.

7) Eine geschlossene Kurve der Länge 13 ist im Kreis von Radius 1 enthalten. Zeigen Sie: Existiert eine Gerade, die die Kurve mindestens in 6 Punkten schneidet.

8) Sei A eine beschränkte meßbare Menge in $\mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{vol}(A) < 1$. Zeigen Sie, dass A so parallelverschoben werden kann, dass sie keinen Gitterpunkt von $\mathbb{Z}^n$ trifft.

9) Sei Γ ein Gitter mit $\det \Gamma = 1$. Zeigen Sie: Existiert ein von Null verschiedener Gitterpunkt $g \in \Gamma$, so dass mindestens eine seinen Koordinaten Absolutbetrag kleiner oder gleich 1 hat:
$$\exists g \in \Gamma, g \neq 0 : \quad \|g\|_\infty \leq 1, \text{ wobei } \|(x^1, \ldots, x^n)\|_\infty = \max{}_{i=1}^{n} |x^i|$$

10) Sei Δ ein Simplex in $\mathbb{R}^3$, so dass seine Ecken Gitterpunkte sind, und Δ keine anderen Gitterpunkte enthält. Sei $\mathrm{vol}(\Delta) = a$. Bestimmen Sie das Ehrhart-Polynom von Δ.

11) Sei $a_n(k)$ die Anzahl der $n \times n$ Matrizen mit ganzen nichtnegativen Einträgen und mit der Eigenschaft, dass die Summen über jede Reihe und über jede Spalte gleich k sind. Zeigen Sie:

(a) $a_n(k) = p_n(k)$, wobei p_n ein Polynom vom Grad $(n-1)^2$ ist;

(b) $p_n(-1) = \cdots = p_n(-n+1) = 0$.

Literaturverzeichnis

[1] Alexander Barvinok. *A course in convexity.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). x, 366 p., 2002.

[2] T. Bonnesen and W. Fenchel. *Theorie der konvexen Körper. (Theory of convex bodies). Reprint of the 1948 ed.* Providence, RI: AMS Chelsea Publishing. 164 S., 1971.

[3] L. Danzer, Branko Grünbaum, and V. Klee. Helly's theorem and its relatives. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 7:101–180, 1963.

[4] H. Hadwiger. Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie. *J. Reine Angew. Math.*, 194:101–110, 1955.

[5] H. Hadwiger. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Springer-Verlag, Berlin, 1957.

[6] Daniel A. Klain and Gian-Carlo Rota. *Introduction to geometric probability.* Lezioni Lincee. [Lincei Lectures]. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[7] K. Leichtweiß. *Konvexe Mengen. Lizenzausg.* Hochschultext. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. 330 S., 140 Abb., 1980.

[8] János Pach and Pankaj K. Agarwal. *Combinatorial geometry.* Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons Inc., New York, 1995.

[9] Rolf Schneider and Wolfgang Weil. *Integralgeometrie.* Teubner Skripten zur Mathematischen Stochastik. [Teubner Texts on Mathematical Stochastics]. B. G. Teubner, Stuttgart, 1992.

[10] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, volume 49 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[11] Gnter M. Ziegler. *Lectures on polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. 152. Berlin: Springer-Verlag. ix, 370 p. , 1995.