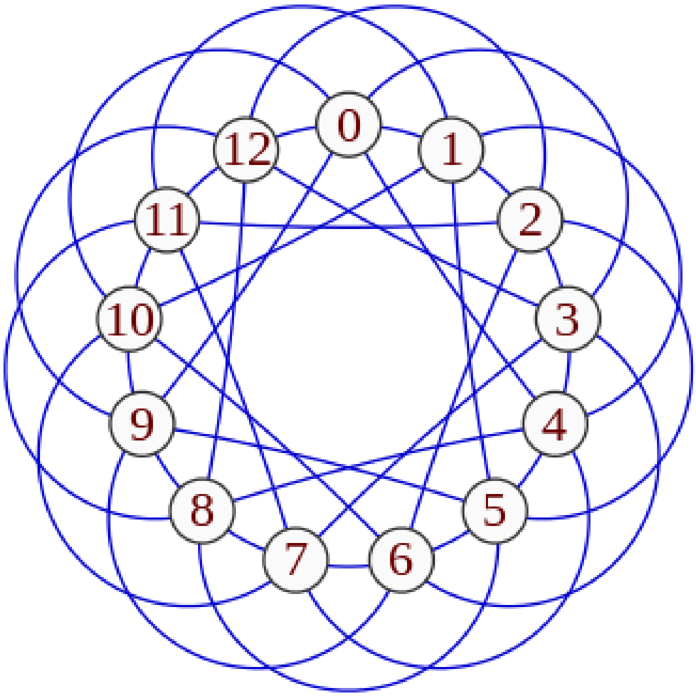
Proséminaire : Graphes expanseurs

1.2 Inégalités du trou spectral

Séverine Zimmermann

28 octobre 2016



Université de Fribourg
Département de Mathématiques
Semestre d'automne 2016
Responsable : Dr. Corina Ciobotaru

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Nouvelles définitions **3**
2.1 Frontière ∂F 3
2.2 Constante isopérimétrique $h(X)$ 3
2.3 Famille de graphes expanseurs 4

3 Définitions et notions utiles pour la preuve **4**

4 Théorème des inégalités du trou spectral **6**

5 Corollaire **6**

6 Preuve du théorème **6**
6.1 $1^{\text{ère}}$ inégalité : $\frac{k-\mu_1}{2} \leq h(X)$ 6
6.2 $2^{\text{ème}}$ inégalité : $h(X) \leq \sqrt{2k(k-\mu_1)}$ 7

7 Preuve de $\Delta = k \cdot Id - A$ **8**

1 Introduction

Cette partie du proséminaire "Expander Graphs" est consacrée à la notion nouvelle d'un graphe expanseur X caractérisé par sa constante isopérimétrique $h(X)$. Un théorème capital permet de trouver des bornes pour cette constante d'expansion $h(X)$ d'un graphe k-régulier qui dépendent du trou spectral $k - \mu_1$, i.e. la différence entre les deux premières valeurs propres du graphe. Il s'agira ici de prouver ce théorème.

On notera par V l'ensemble des sommets d'un graphe $X = (V, E)$ et E l'ensemble de ses arêtes. $|M|$ désignera la cardinalité (= le nombre d'éléments) d'un ensemble M quelconque.

2 Nouvelles définitions

2.1 Frontière ∂F

Prenons une partie $F \subseteq V$. La **frontière** ∂F (*boundary*) de F est définie par l'ensemble des arêtes reliant un sommet de F à un sommet de $V - F$. Par conséquent, on obtient : $\partial F = \partial(V - F)$. Observons l'exemple suivant :

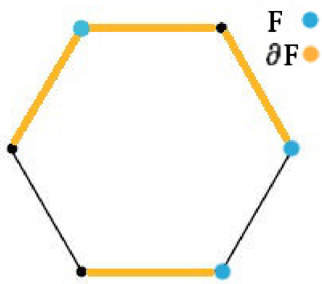


FIGURE 1 – Frontière d'une partie $F \subseteq V$

2.2 Constante isopérimétrique $h(X)$

La **constante isopérimétrique** ou **constante d'expansion** d'un graphe $X = (V, E)$ est définie par :

$$h(X) := inf \left\{ \frac{|\partial F|}{min\left\{|F|, |V - F|\right\}} : F \subseteq V : 0 < |F| < \infty \right\} \tag{1}$$

Si X est fini avec n sommets, la définition suivante est équivalente :

$$h(X) := min \left\{ \frac{|\partial F|}{|F|} : F \subseteq V : 0 < |F| \leq \frac{n}{2} \right\} \tag{2}$$

$h(X)$ est une mesure de la qualité de connexion lorsque X est vu comme un réseau qui transmet de l'information. Plus h(X) est grand, meilleure est la connexion. Cependant, la meilleure solution n'est pas de prendre un graphe complet, i.e. pour lequel une arête existe entre chaque couple de sommets. En effet, dans la vie réelle, plus on a de liens (câbles en cuivre par exemple), plus c'est cher. Le but sera alors de trouver la connectivité optimale, décrite par $h(X)$, pour un nombre d'arêtes le plus petit possible.

2.3 Famille de graphes expanseurs

On considère une famille de graphes $(X_m)_{m\geq 1}$ finis, connectés, k-réguliers et tels que $|V_m| \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On appelle $(X_m)_{m\geq 1}$ une **famille de graphes expanseurs** si :

$$\exists\, \epsilon > 0 \text{ tel que } h(X_m) \geq \epsilon\ \forall\, m \geq 1 \tag{3}$$

On peut citer comme contre-exemple la famille des cycles C_m car $|h(C_m)| \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En effet, on voit que pour m grand, ces graphes sont peu connectés. Le but de ce proséminaire sera de construire des graphes expanseurs.

3 Définitions et notions utiles pour la preuve

On considère un graphe $X = (V, E)$ fini, sans boucle, connecté et k-régulier. On dote X d'une orientation arbitraire et on note e^- l'origine et e^+ l'extrêmité pour toute arête $e \in E$. Voici un exemple visuel, dans lequel l'arête (v_1, v_2) a $e^- = v_2$ et $e^+ = v_1$:

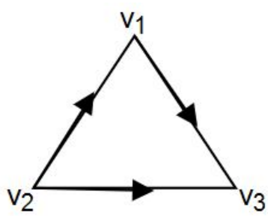


FIGURE 2 – Orientation arbitraire du cycle C_3

L'**opérateur de bord** est une application $d : l^2(V) \to l^2(E)$ définie par :

$$df(e) := f(e^+) - f(e^-) \tag{4}$$

où $f \in l^2(V)$ et $e \in E$. Dans notre cas, comme X est un ensemble fini, f peut être n'importe quelle application complexe définie sur V.

Nous définissons ensuite un **produit scalaire hermitien** sur $l^2(V)$ et sur $l^2(E)$ de la manière suivante :

$$< f_1|f_2 >:= \sum_{x\in V} \overline{f_1(x)} \cdot f_2(x) \tag{5}$$

$$< g_1|g_2 >:= \sum_{e\in E} \overline{g_1(e)} \cdot g_2(e) \tag{6}$$

où $f_1, f_2 \in l^2(V)$ et $g_1, g_2 \in l^2(E)$.

On caractérise **l'opérateur adjoint** ou **opérateur conjugué-transposé** $d^* : l^2(E) \to l^2(V)$ par la relation :

$$< df|g >=< f|d^*g > \tag{7}$$

pour tout $f \in l^2(V)$ et $g \in l^2(E)$.

L'application suivante sert uniquement de notation afin de faciliter les calculs. On définit $\delta : V \times E \to \{-1, 0, 1\}$ par :

$$\delta(x,e) := \begin{cases} 1 & \text{si } x = e^+ \\ -1 & \text{si } x = e^- \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{8}$$

Comme nous avons supposé X sans boucle, cette application est bien définie.

En utilisant cette nouvelle notation, on peut réécrire :

$$df(e) = \sum_{x \in V} \delta(x,e) \cdot f(x) \tag{9}$$

où $f \in l^2(V)$ et $e \in E$.

$$d^*g(x) = \sum_{e \in E} \delta(x,e) \cdot g(e) \tag{10}$$

où $g \in l^2(E)$ et $x \in V$.

Cette dernière relation se déduit de (7) en utilisant l'application $f(y) = \delta_{xy}$ le delta de Kronecker.

Finalement, nous définissons l'**opérateur combinatoire de Laplace** par la combinaison des applications d et d^* :

$$\Delta := d^*d : l^2(V) \to l^2(V) \tag{11}$$

Par calcul (cf. section 7), nous pouvons prouver que :

$$\Delta = k \cdot Id - A \tag{12}$$

où A est la matrice d'adjacence du graphe X.

Cette relation prouve que Δ ne dépend pas du choix de l'orientation arbitraire appliquée à X. Δ représente donc une matrice, qu'on peut orthogonaliser en trouvant une base orthogonale d'applications propres de A :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & k-\mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & k-\mu_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & k-\mu_{n-1} \end{pmatrix} \tag{13}$$

où $k = \mu_0 > \mu_1 \geq ... \geq \mu_{n-1}$ sont les n valeurs propres d'un graphe X k-régulier et connecté. $k-\mu_1$ est appelé le **trou spectral** du graphe X. Rappelons que 0 est la valeur propre correspondante à une application constante dans $l^2(V)$ pour Δ.

4 Théorème des inégalités du trou spectral

Soit $X = (V, E)$ un graphe fini, connecté, k-régulier et sans boucle. On note μ_1 la première valeur propre de X non triviale, i.e. $\neq k$. Alors :

$$\frac{k - \mu_1}{2} \leq h(X) \leq \sqrt{2k(k - \mu_1)} \tag{14}$$

Ce théorème est fondamental car il est plus facile de calculer le trou spectral d'un graphe que sa constante isopérimétrique. Ainsi, le corollaire suivant facilite la détection d'une famille de graphes expanseurs :

5 Corollaire

Soit $(X_m)_{m\geq 1}$ une famille de graphes finis, connectés, k-réguliers, sans boucle et tels que $|V_m| \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Alors $(X_m)_{m\geq 1}$ est une famille de graphes expanseurs si et seulement si :

$$\exists\, \epsilon > 0 \text{ avec } k - \mu_1(X_m) \geq \epsilon\ \forall\, m \geq 1 \tag{15}$$

6 Preuve du théorème

6.1 $1^{\text{ère}}$ inégalité : $\frac{k-\mu_1}{2} \leq h(X)$

On note $f_0, ..., f_{n-1}$ n applications propres orthogonales correspondant respectivement aux valeurs propres $k = \mu_0 > \mu_1 \geq ... \geq \mu_{n-1}$ de X. Ces applications forment donc une base orthogonale de $l^2(V)$. Comme vu précédemment, f_0 est l'application constante qui vaut srlg 1 partout.

Soit une application $f \in l^2(V)$ telle que $\sum_{x\in V} f(x) = 0$. Alors, par le produit scalaire avec f_0, on voit que f est orthogonale à f_0. f est donc une combinaison linéaire de $f_1, ..., f_{n-1}$:

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot f_i$$

pour des $a_i \in \mathbb{C}$.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \|\ df\ \|_2^2 &= < df|df > = < f|\Delta f > = < f|k\cdot f - A\cdot\sum_{i=1}^{n-1} a_i\cdot f_i > \\ &= < f|k\cdot\sum_{i=1}^{n-1} a_i\cdot f_i - \sum_{i=1}^{n-1}\mu_i\cdot a_i\cdot f_i > = < f|\sum_{i=1}^{n-1}(k-\mu_i)\cdot a_i\cdot f > \\ &\geq (k-\mu_1)\cdot < f|\sum_{i=1}^{n-1} a_i\cdot f_i > = (k-\mu_1)\cdot \|\ f\ \|_2^2 \end{aligned} \tag{16}$$

Fixons $F \subseteq V$ et définissons $f \in l^2(V)$:

$$f(x) := \begin{cases} |V-F| & \text{si } x \in F \\ -|F| & \text{si } x \in V-F \end{cases} \tag{17}$$

Cette application vérifie bien $\sum_{x\in V} f(x) = 0$ et donc (16) est valable. f satisfait l'égalité suivante :

$$\| f \|_2^2 = |F| \cdot |V-F|^2 + |V-F| \cdot |F|^2 = |F| \cdot |V-F| \cdot |V| \tag{18}$$

De plus, on a :

$$df(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \notin \partial F \\ \pm|V| & \text{si } e \in \partial F \end{cases} \tag{19}$$

D'où :

$$\| df \|_2^2 = |V|^2 \cdot |\partial F| \tag{20}$$

En insérant (18) et (20) dans (16) et en supposant $0 < |F| \leq \frac{V}{2}$:

$$\begin{array}{rrcl} & |V|^2 \cdot |\partial F| & \geq & (k-\mu_1) \cdot |F| \cdot |V-F| \cdot |V| \\ \Leftrightarrow & \frac{|\partial F|}{|F|} & \geq & (k-\mu_1) \cdot \frac{|V-F|}{|V|} \\ \Rightarrow & \frac{|\partial F|}{|F|} & \geq & \frac{k-\mu_1}{2} \\ \Rightarrow & h(X) & \geq & \frac{k-\mu_1}{2} \end{array} \tag{21}$$

6.2 $2^{\text{ème}}$ inégalité : $h(X) \leq \sqrt{2k(k-\mu_1)}$

On considère une application $f \in l^2(V)$ non-négative et on note par $\beta_r > ... > \beta_1 > \beta_0$ les $r+1$ différentes valeurs que prend f. On définit la valeur B_f et les ensembles L_i par :

$$B_f := \sum_{e\in E} | f(e^+)^2 - f(e^-)^2 | \tag{22}$$

$$L_i := \{x \in V : f(x) \geq \beta_i\} \qquad\qquad i = 0, 1, ..., r \tag{23}$$

On suppose $|\text{supp} f| \leq \frac{|V|}{2}$ où le support est définie par : $\text{supp} f := \{x \in V : f(x) \neq 0\}$. Nous pouvons prouver facilement les trois relations suivantes :

$$B_f = \sum_{i=1}^{r} |\partial F| \cdot (\beta_i^2 - \beta_{i-1}^2) \tag{24}$$

$$B_f \leq \sqrt{2k} \cdot \| df \|_2 \cdot \| f \|_2 \tag{25}$$

$$B_f \geq h(X) \cdot \| f \|_2^2 \tag{26}$$

Définissons maintenant explicitement une application f avec les hypothèses voulues précédemment.

Soit g une application propre réelle de Δ avec valeur propre $k - \mu_1$. Soit $V^+ := \{x \in V : g(x) > 0\}$ pour lequel on suppose srlg $|V^+| \leq \frac{|V|}{2}$, sinon considérer $-g$. Soit $f := \{g, 0\}$.

Pour $x \in V^+$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
(\Delta f)(x) &= k\cdot f(x) - \sum_{y\in V} A_{xy}\cdot f(y) = k\cdot g(x) - \sum_{y\in V^+} A_{xy}\cdot g(y) \\
&\leq k\cdot g(x) - \sum_{y\in V} A_{xy}\cdot g(y) = (\Delta g)(x) = (k-\mu_1)\cdot g(x)
\end{aligned}
\tag{27}
$$

D'où :

$$
\| df \|_2^2 = \sum_{x\in V^+} (\Delta f)(x)\cdot g(x) \leq (k-\mu_1)\cdot \sum_{x\in V^+} g(x)^2 \leq (k-\mu_1)\cdot \| f \|_2^2 \tag{28}
$$

Ainsi, en utilisant (25) et (26), on obtient :

$$
h(X)\cdot \| f \|_2^2 \leq B_f \leq \sqrt{2k}\cdot \| df \|_2 \cdot \| f \|_2 \leq \sqrt{2k(k-\mu_1)}\cdot \| f \|_2 \tag{29}
$$

D'où le résultat final :

$$
h(X) \leq \sqrt{2k(k-\mu_1)} \tag{30}
$$

■

7 Preuve de $\Delta = k \cdot Id - A$

Soit un graphe $X = (V; E)$ fini, sans boucle, connecté et k-régulier. Prouvons que $\Delta = k\cdot Id - A$.

Soient $f \in l^2(V)$ et $x \in V$. On note $E_x := \{e \in E : x = e^+ \; ou \; x = e^-\}$. Alors :

$$
\begin{aligned}
(\Delta f)(x) = d^*(df)(x) = \sum_{e\in E} \delta(x,e)\cdot df(e) = \sum_{e\in E} \delta(x,e)\cdot \left[f(e^+) - f(e^-)\right] \\
= \sum_{e\in E} \delta(x,e)\cdot f(e^+) - \sum_{e\in E} \delta(x,e)\cdot f(e^-) = \sum_{e\in E_x} \delta(x,e)\cdot f(e^+) - \sum_{e\in E_x} \delta(x,e)\cdot f(e^-) \\
= k\cdot f(x) - \textstyle\sum_{y\in V} A_{xy}\cdot f(y) = k\cdot f(x) - (A\cdot f)(x)
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Justifications :

□ Comme X est k-régulier :

- Il existe $0 \leq m \leq k$ fois où $x = e^+$ et donc $f(x) = f(e^+)$ et $\delta(x,e) = 1$
- Il existe $k - m$ fois où $x = e^-$ et donc $f(x) = f(e^-)$ et $\delta(x,e) = -1$
- D'où : $m \cdot 1 \cdot f(x) - (k-m)\cdot(-1)\cdot f(x) = k \cdot f(x)$

□

- Pour la 1ère somme $\left[\sum_{e\in E_x} \delta(x,e)\cdot f(e^+)\right]$: Il y a $k - m$ fois où $x \neq e^+$ mais $x = e^-$. Donc $\delta(x,e) = -1$. $f(e^+) = f(y)$ pour $y \neq x$, $y \in V$. Le terme $f(y)$ apparaît A_{xy} fois, i.e. le nombre de fois où les sommets x et y sont reliés.

- Pour la $2^{\text{ème}}$ somme $\left[\sum_{e \in E_x} \delta(x,e) \cdot f(e^-)\right]$: Même idée avec $\delta(x,e) = 1$.

Comme (31) est valable pour tout $f \in l^2(V)$ et $x \in V$, on a :

$$\Delta = k \cdot Id - A \tag{32}$$

$\blacksquare$