THÉORIE DES RÉPRESENTATIONS DES GROUPES FINIS

Dernière mise à jour : 23 janvier 2017

Eugène Skopa

Université de Fribourg
Département de Mathématiques
Semestre d'automne 2016
Responsable : Dr. Corina Ciobotaru

La théorie des répresentations des groupes finis

Après avoir étudié autant de théorie des groupes, pourquoi apprendre encore la théorie de la représentation ? La réponse est double. D'une part les groupes ne sont pas des objets linéaires à proprement parler, donc la théorie des représentations permet de les linéairser. D'autre part, l'algèbre linéaire est un outil très puissant qui permet de comprendre la structure de ces objets encore plus en profondeur.

■ **Définition 1.** *Soit G un groupe. Soit V un espace vectoriel de dimension complexe. Soit π :*

$$\pi : G \to GL(V) \simeq GL(n, \mathbb{C})$$

un homomorphisme de groupe, i.e.,

$$\forall g_1, g_2 \in G : \pi(g_1 g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2).$$

La paire (π, V) est appelée une ***représentation***[1] *de G. La dimension de V est appelée le degré de (π, V).*

Remarque. Lorsqu'il n'y a pas de confusion sur l'espace vectoriel associé, on note simplement π à la place de (π, V).

■ **Définition 2.** *Soit G un groupe. Soit X un ensemble non vide muni d'un homomorphisme $G \to Sym(X)$ où Sym(X) est le groupe des symétries de X. Soit $\mathbb{C}X$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ qui valent 0 partout sauf sur des sous-ensembles finis de X.*

On dit alors que X est un G-espace et on définit λ_X de G sur $\mathbb{C}X$ la représentation des permutations[2] *:*

$$\lambda_X : G \to GL(\mathbb{C}X),\ (\lambda_X(g)f)(x) := f(g^{-1}x),\ \forall f \in \mathbb{C}X,\ \forall x \in X,\ \forall g \in G.$$

En considérant G comme un G-espace avec une multiplication à gauche, on obtient la ***representation regulière à gauche (left regular representation)***[3]*, définie par :*

$$\lambda_G : G \to GL(\mathbb{C}G),\ (\lambda_G(g)f)(x) := f(g^{-1}x),\ \forall f \in \mathbb{C}G,\ \forall x, g \in G.$$

Et de même pour la multiplication à droite on obtient la ***représentation regulière à droite (right regular représentation)***[4] *définie par :*

1. Définition 3.4.1, page 96, [DSV03].
2. Exemple 3.4.2 (iii) page 97, [DSV03]
3. Exemple 3.4.2 (iv), page 97, [DSV03]
4. Exemple 3.4.2 (iv), page 97, [DSV03]

$$(\rho_G(g)f)(x) := f(xg).$$

Exemple 3. *Soit G un groupe quelconque. Soit $V = \mathbb{C}$. Soit π tel que :*

$$\pi : G \to GL(1,\ V) \simeq \mathbb{C}$$
$$\pi(g) := Id \quad \forall g \in G.$$

Cette représentation s'appelle la ***représentation triviale***[5].

Exemple 4. *Exemples additionnels :*

1. *Soit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit ρ tel que :*

$$\rho : G \to GL_2(\mathbb{C})$$

$$\rho(0,0) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho(0,1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(1,0) := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho(1,1) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   ρ définit une représentation de G.

2. *Soit $G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et soit $V = \mathbb{R}^5$. Soit $\{e_0, ..., e_4\}$ une base de V. Soit :*

$$\lambda_G : G \to GL(V)$$
$$\lambda_G(k)e_l := e_{l+k} \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z},$$

$$\rho_G : G \to GL(V)$$
$$\rho_G(k)e_l := e_{l-k} \quad k, l \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

   π et ρ définissent respectivement la representation régulière à gauche et la représentation régulière à droite de G sur $V = \mathbb{C}G$.[6]

■ **Définition 5.** *Soit $(\pi,\ V)$ une représentation de G. Un sous-espace linéaire W de V est dit* ***invariant*** *si $\forall g \in G : \pi(g)(W) \subseteq W$.*

Note. Les sous-espaces 0 et V sont dits des sous-espaces invariants triviaux.

Exemple 6. *Soit X un G-espace. L'ensemble*

$$W_0 := \{\ f \in \mathbb{C}X : \sum_{x \in X} f(x) = 0\ \}$$

est invariant[7] *par rapport à λ_X.*

5. Exemple 3.4.2 (i), page 96, [DSV03]. De même Exemple 2.6, page 3, [Mar11]
6. Example tiré de [Wik], consulté le 24 Novembre 2016.
7. Exemple 3.4.4, page 97, [DSV03]

Démonstration. Tout d'abord on observe que $\forall x \in X, g^{-1}x \in X$ et donc on a que $g^{-1}X = X$. Ceci est dû au fait que g est une représentation de permutations sur X, donc $g^{-1}x$ n'est rien d'autre qu'un autre élément de X.

Soit $g \in G$ fixé. On prend $f \in W_0$, cela implique que $\sum_{x\in X} f(x) = 0$, de là il suit que :

$$0 = \sum_{x\in X} f(x) = \sum_{g^{-1}x\in X} f(g^{-1}x) = \sum_{x\in X} (\lambda_X(g)f)(x) = \sum_{h\in X} h(x) \quad \text{où } h(x) = \lambda_X(g)f(x).$$

Comme g agit sur X par permutation, $h(x)$ n'est rien d'autre que $f(x)$ avec arguments permutés. D'où le fait que la somme reste la même. On obtient donc que W_0 est un sous-espace invariant. ∎

■ **Définition 7.** *Une **réprésentation** (π, V) avec $V \neq 0$ est dite **irreductible** si elle a uniquement 0 et V comme sous-espaces invariants. (i.e. elle n'a pas de sous espace invariant non-trivial).*

■ **Définition 8.** *Soient (π, V) et (ρ, W) deux représentations de G. Une application linéaire $T : V \to W$ **entrelace (intertwines)**[8] π et ρ si $\forall g \in G$ on a que : $T\pi(g) = \rho(g)T$.*

On note $Hom_G(\pi, \rho)$ l'espace vectoriel des applications qui entrelacent π et ρ.

■ **Définition 9.** *Soient (π, V) et (ρ, W) deux représentations de G. π et ρ sont dites **équivalentes**[9] s'il existe une applications linéaire inversible dans $Hom_G(\pi, \rho)$.*

Autrement dit il existe une application linéaire inversible $T : V \to W$ tel que $\forall g \in G$

$$\rho(g) = T\pi(g)T^{-1}.$$

Note. A noter que lorsque T entrelace π et ρ, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi(g)"] \arrow[d, "T"] & V \arrow[d, "T"] \\ W \arrow[r, "\rho(g)"] & W. \end{tikzcd}$$

■ **Théorème 10.** *Soient (π, V), (ρ, W) deux représentations d'un groupe G, de dimension finie et irréductibles. Alors :*

$$dim_{\mathbb{C}} Hom_G(\pi, \rho) = \begin{cases} 0 & si\ \pi\ et\ \rho\ ne\ sont\ pas\ équivalents. \\ 1 & si\ \pi\ et\ \rho\ sont\ \textbf{équivalents}. \end{cases}$$

Ce théorème est aussi connu sous le nom du Lemme de Schur[10].

8. Définition 3.4.7 (a), page 98, [DSV03]
9. Définition 3.4.7 (b), page 98, [DSV03]
10. Théorème 3.4.9, page 99, [DSV03]

Démonstration. On prouve cela par contraposition.
Supposons que $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G(\pi, \rho) > 0$. Alors $\exists T \in \mathrm{Hom}_G(\pi, \rho)$ tel que $T \neq 0$

Comme T est une application linéaire, elle possède un Ker et une Im. On souhaite prouver que T est bijective : injective et surjective. De plus, il nous faut également montrer que Ker et Im sont invariants par π et ρ respectivement.

1. Tout d'abord on souhaite prouver que $KerT = \{v \in V | T(v) = 0\}$ est invariant sous π et vaut 0.
   Soit $v \in KerT$, on a que $T(v) = 0$ et $T \in Hom_G(\pi, \rho)$, on a donc :
   $$0 = (\rho(g)T)(v) = \rho(g)T(v) = \rho(g)0 = T\pi(g))(v) = 0$$
   Donc on a que $(\pi(g))(v) \in KerT$ et on conclut que $KerT$ est un sous-espace invariant par π. Mais π est définie comme irréductible, donc π possède uniquement 0 et V comme sous-espaces invariants. D'où $KerT = 0$ ou $KerT = V$, mais la second option n'est pas possible car $T \neq 0$. De là il suit que $KerT = 0$ ce qui implique que T est **injective**[11].
2. Puis on souhaite prouver que $ImT = \{w \in W \mid \exists\ v \in V \text{tel que} T(v) = w\}$ est un sous-espace invariant par ρ.
   Soit $w \in ImT$, $\exists\ v \in V$ tel que $T(v) = w$.
   $$\rho(g)(T(v)) = \rho(g)(w) = T\pi(g)(v) \Rightarrow \rho(g)(w) = T(v') \text{ où } v' = \pi(g)V.$$
   Cela prouve que ImT est un sous-espace invariant par ρ. Mais ρ est irréductible donc ρ possède uniquement 0 et W comme sous-espaces invariants. D'où $ImT = 0$ ou $ImT = W$, mais la première option n'est pas possible car ImT n'est un sous-espace vide. De là il suit que T est **surjective**[12].
3. Comme T est injective et surjective, elle est **bijective** et par conséquent **inversible**. De là on a que π et ρ sont équivalentes (par la Definition 8).
   Pour prouver que $dim_{\mathbb{C}}(Hom_G(\pi, \rho)) = 1$ on suppose que $\pi = \rho$. De là on a que $\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi)$ sur un corps algébriquement clos contient toujours l'espace unidimensionnel des matrices scalaires de type αId. Comme V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel fini, T doit obligatoirement avoir au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Ainsi :
   $$Ker(T - \lambda Id_{\mathbb{C}}) \neq 0$$
   On prouve ensuite que $Ker(T - \lambda Id_{\mathbb{C}})$ est π invariant.
   Soit $v \in Ker(T - \lambda Id_{\mathbb{C}})$, donc $T(v) = \lambda v$. Ainsi on a :
   $$(T\pi(g))(v) = T(\pi(g)(v)) = \pi(g)T(v) = \pi(g)\lambda V = \lambda\pi(g)V.$$
   De là on conclut que $Ker(T-\lambda Id_{\mathbb{C}})$ est π invariant. De plus comme π est **irréductible**, on doit avoir que $Ker(T - \lambda Id_{\mathbb{C}}) = V$, autrement dit $T = \lambda Id_{\mathbb{C}} \Rightarrow dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_G(\pi, \rho) = 1$[13].

■

■ **Définition 11.** *Soient V et W deux espace vectoriels sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ (dans notre cas on va considérer que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors il existe un espace vectoriel noté $V \otimes W$ et une application bilinéaire (linéaire en chacune de ses variables) :*

11. Lemma 1.13, page 13, [KS10]
12. Lemma 1.14, page 13, [KS10]
13. Preuve du Theorème 1.15, page 3, [KS10]

$$\phi : V \times W \to V \otimes W$$
$$\phi(x, y) = x \otimes y$$

ayant la propriété suivante (dite universelle) :

$\forall$ *espace vectoriel* G *et* $\forall$ *applications bilinéaire* g *de* $V \times W \to G$, $\exists\ \tilde{g}$ *une application linéaire de* $V \otimes W \to G$ *tel que :*

$$g = \tilde{g} \circ \phi.$$

Autrement dit :

$$\forall v \in V, \forall w \in W, g(v, w) = \tilde{g}(v \otimes w).$$

Si V *et* W *sont de dimension finie, alors :*

$$dim(V \otimes W) = dim(V) * dim(W).$$

Cette opération est appelée le ***produit tensoriel***[14].

Exemple 12. *Exemple de l'application du produit tensoriel.*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{pmatrix}.$$

■ **Définition 13.** *Soit* G *un groupe. Soient* (π, V) *et* (ρ, W) *deux représentations du groupe* G*. Alors*[15] *:*

1. *Soit* $V^* = Hom(V, \mathbb{C})$ *l'espace vectoriel* ***dual*** *à* V*. La représentation* ***conjuguée*** (π^*, V^*) *de* (π, V) *est une représentation de* G *sur* V^* *définie par :*

$$(\pi^*(g)f)(v) := f(\pi(g^{-1})v),\ \forall\ g \in G, v \in V, f \in V^*$$

2. *La* ***somme directe*** *de* π *et de* ρ *est une représentation* $(\pi \oplus \rho, V \oplus W)$ *de* G *sur* $V \oplus W$ *définie par :*

$$(\pi \oplus \rho)(g)(v, w) := (\pi(g)v, \rho(g)w),\ \forall\ g \in G, v \in V, w \in W$$

3. *Le produit tensoriel de* π *et de* ρ *est une représentation* $(\pi \otimes \rho, V \otimes W)$ *de* G *sur* $V \otimes W$ *définie sur des tenseurs élémentaires* $v \otimes w$ *par :*

$$(\pi \otimes \rho)(g)(v \otimes w) := \pi(g)v \otimes \rho(g)w,\ \forall\ g \in G, v \in V, w \in W$$

■ **Proposition 14.** *Soit* (π, V) *une représentation d'un groupe fini* G[16].

14. Version simplifiée de la théorie de la page 100 dans [DSV03].
15. Définition 3.4.10, page 101, [DSV03]
16. Proposition 3.4.12, page 102, [DSV03]

1. *Il existe un produit* **scalaire hermitien** $\langle\cdot|\cdot\rangle$ *sur* V *qui est invariant sous* π : $\langle\pi(g)v_1|\pi(g)v_2\rangle = \langle v_1|v_2\rangle$. $\forall\ v_1, v_2 \in V$ *et* $\forall\ g \in G$.

   Démonstration. Soit $(\cdot|\cdot)$ produit **scalaire hermitien** quelconque sur V. On définit :

   $$\langle v_1|v_2\rangle := \sum_{h\in G}(\pi(h)v_1|\pi(h)v_2) \quad (\forall\ v_1, v_2 \in V).$$

   Ainsi pour $g \in G$ on a que :

   $$\begin{aligned}\langle\pi(g)v_1|\pi(g)v_2\rangle &= \sum_{h\in G}(\pi(hg)v_1|\pi(hg)v_2)\\ &= \sum_{h'\in G}(\pi(h')v_1|\pi(h')v_2)\\ &= \langle v_1|v_2\rangle.\end{aligned}$$

   La seconde égalité suit du fait qu'on remplace $h' = hg$ dans G. ■

2. *Tout sous-espace invariant* W *de* π *admet un complément invariant. En d'autres mots, il existe un sous-espace invariant* W' *tel que :* $W \bigcap W' = \{0\}$ *et* $W \oplus W' = V$.

   Démonstration. Soit W un sous-espace invariant de π. Par la démonstration plus haut on a que π laisse invariant un certain produit scalaire hermitien $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur V. On définit le W' comme un sous-espace orthogonal à W vis à vis du produit scalaire hermitien $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur V.

   $$W' := \{v \in V : \langle v \mid w\rangle = 0 \quad \forall w \in W\}.$$

   On a donc :

   (a) W' n'est pas vide :
   $$\langle 0 \mid w\rangle = 0 \Rightarrow 0 \in W'.$$

   (b) W' satisfait aux conditions de la multiplication scalaire.
   $$\langle \alpha v \mid w\rangle = \alpha\langle v \mid w\rangle = 0$$ [17].

   (c) W' satisfait aux exigences de l'addition vectorielle : Soit $u \in W'$
   $$\langle u + v \mid w\rangle = \langle u \mid w\rangle + \langle v \mid w\rangle.$$

   (d) $W \cap W' = 0$: Soit $v \in V$ tel que $v \in W$ et $v \in W'$
   $$\langle v \mid v\rangle = 0 \ \Rightarrow v = 0.$$

   De là on a que W' est un **complément orthogonal à W**. On prouve ensuite que W' est un sous-espace invariant sous $\pi(G)$:

17. Par les propriétés du produit hermitien

$$\langle \pi(g)v \mid w \rangle = \langle h \mid w \rangle = \langle \pi(g^{-1})h \mid \pi(g^{-1})w \rangle = \langle \pi(g^{-1})\pi(g)v \mid \pi(g^{-1})w \rangle = \langle v \mid \pi(g^{-1})w \rangle.$$

Ici on remplace à la seconde étape $\pi(g)v$ par h. Ainsi comme W est invariant et π est unitaire [18] on a que W' est aussi invariant par π(G). ■

3. *Si $V \neq \{0\}$, alors π est équivalent à une somme directe des représentations irréductibles de G.*

Démonstration. On prouve cela par induction sur $dim_{\mathbb{C}}$. Si $dim_{\mathbb{C}} = 1$ alors π est irréductible (par Definition 7). Si la $dim_{\mathbb{C}} > 1$, alors soit π est irréductible et donc il n'y a rien à prouver, soit π admet un sous-espace invariant non-trivial W. Par la proposition au-dessus on peut donc trouver un autre sous-espace invariant non-trivial W' qui est le complément orthogonal à W.
Alors l'application $W \oplus W' \to V : (w, w') \mapsto w + w'$ définit une relation d'équivalence entre $\pi|_W \oplus \pi|'_W$ et π. De plus, par notre étape de fixation, on a que : $\pi|_W$ et $\pi|'_W$ sont équivalentes à une somme directe des sous-représentations irréductibles. (i.e. On peut décomposer de manière recursive $\pi|_W$ et $\pi|'_W$ en des sous-représentations irréductibles). ■

■ **Proposition 15.** *Soit (π, V) une représentation d'un groupe fini G [19]. On définit :*

$$\mathcal{P}_\pi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(g).$$

Alors :

1. *$\mathcal{P}_\pi^2 = \mathcal{P}_\pi$: $\mathcal{P}_\pi$ est idempotent dans $End(V) = Hom(V, V)$.*

Démonstration. $\forall s \in G$ fixé, on peut trouver des paires $(g, h) \in G \times G$ tel que $gh = s$, on peut en effet en trouver $|G|$. De là nous avons que :

$$\mathcal{P}_\pi^2 = (\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(g))(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \pi(h)) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} \pi(gh) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \pi(s) = \mathcal{P}_\pi.$$

■

2. *$\forall h \in G : \pi(h)\mathcal{P}_\pi = \mathcal{P}_\pi \pi(h) = \mathcal{P}_\pi$.*

Démonstration. On définit $g' = gh$ ainsi on obtient :

$$\pi(h)\mathcal{P}_\pi = \pi(h)(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(hg) = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \pi(g') = \mathcal{P}_\pi.$$

■

3. *$Im\mathcal{P}_\pi = V^G$.*

Démonstration. Soit $Im\mathcal{P}_\pi$, comme l'image d'une application idempotente est l'ensemble de ses points fixes [20] on a que :

$$Im\mathcal{P}_\pi = \{v \in V \mid \exists w : \mathcal{P}_\pi(v) = w\} \overset{\mathcal{P}_\pi \ idempot.}{=} \{v \in V : \mathcal{P}_\pi(v) = v\}.$$

18. π préserve le produit scalaire
19. Proposition 3.4.14, page 103, [DSV03]
20. Un point fixe d'une fonction est un point tel que : $f(x) = x$.

Si $v \in V^G$ alors on a clairement que $\mathcal{P}_\pi(v) = v$. De même que si on a $\mathcal{P}_\pi = V$ alors par 2 on a que : $\forall h \in V$:

$$\pi(h)(v) = \pi(h)\mathcal{P}_\pi(v) = \mathcal{P}_\pi(v) = v.$$

Donc $Im\mathcal{P}_\pi = V^G$. ■

4. $\frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \pi(g) = dim_{\mathbb{C}}(V^G)$.

Démonstration. Un des résultats de l'algèbre linéaire nous donne que la trace d'une application idempotente est la dimension de son image.
(Une matrice idempotente est trivialement diagonalisable, de plus si deux matrices sont semblables, elles ont le même rang et la même trace, ainsi, si on suppose qu'on a une matrice diagonale : $D^2 = D \Leftrightarrow d_{ii}^2 = d_{ii} \Leftrightarrow d_{ii} \in \{0, 1\}$. Ainsi le nombre des 1 sur la diagonale de D (le rang) nous donne la trace).
Ainsi on a que :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Tr(\pi(g)) = Tr(\mathcal{P}_\pi) = \dim_{\mathbb{C}}(V^G).$$

■

■ **Définition 16.** *Soit (π, V) une représentation d'un groupe G. Le* ***caractère***[21] *de π est la fonction :*

$$\begin{gathered} \mathcal{X}_\pi : G \to \mathbb{C} \\ g \mapsto Tr(\pi(g)) \\ \forall\ g \in G \end{gathered}$$

Le caractère d'une représentation possède quelques propriétés pratiques, la proposition et le lemme suivant en donnent une liste.

■ **Proposition 17.** *Soit (π, V) et (ρ, W) deux représentations de G*[22].

1. $\mathcal{X}_{\pi^*} = \mathcal{X}(g^{-1}) \quad \forall g \in G$.

Démonstration. Soit $(e_1^*, ..., e_m^*)$ la base duale de la base $(e_1, ..., e_m)$, alors dans cette base de V^* la matrice $\pi^*(g)$ est la transposée de la matrice $\pi(g^{-1})$ dans la base $(e_1, ..., e_m)$. De là on a :

$$\mathcal{X}_{\pi^*} = Tr(\pi^*(g)) = Tr\left((\pi^*(g))^T\right) = Tr(\pi(g^{-1})) = \mathcal{X}(g^{-1}).$$

Car toute matrice a la même trace que sa transposée. ■

2. $\mathcal{X}_{x \oplus \rho} = \mathcal{X}_\pi + \mathcal{X}_\rho$.

Démonstration. Cela suit directement de la définition. Il suffit de representer le produit tensoriel $(\pi \otimes \rho)(g)$ dans $V \otimes W$ et on a :

21. Définition 3.4.15, page 104, [DSV03]
22. Proposition 3.4.17, page 105, [DSV03]

$$(\pi \otimes \rho)(g) = \begin{pmatrix} \pi(g) & \circ \\ \circ & \rho(g) \end{pmatrix}.$$

En calculant le caractère on obtient bien : $\mathcal{X}_\pi + \mathcal{X}_\rho$. ■

3. $\mathcal{X}_{\pi\otimes\rho} = \mathcal{X}_\pi \cdot \mathcal{X}_\rho$.

Démonstration. Soit $\pi(g)_{ik}$ la matrice de $\pi(g)$ et respectivement $\rho(g)_{jl}$ la matrice de $\rho(g)$, dans la base donnée. Alors la matrice de $\pi(g) \otimes \rho(g)$ dans la base $(e_i \otimes f_j)_{\substack{1\leq i\leq m;\\ 1\leq j\leq n}}$ du produit tensoriel $V \otimes W$ est $(\pi(g)_{ik}\rho(g)_{jl})_{\substack{1\leq i\leq m.\\ 1\leq j\leq n}}$ En applicant la définition du caractère on obtient donc :

$$\mathcal{X}_{\pi\otimes\rho}(g) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \pi(g)_{ii}\rho(g)_{jj} = \left(\sum_{i=1}^{m} \pi(g)_{ii}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \rho(g)_{jj}\right) = \mathcal{X}_\pi(g)\mathcal{X}_\rho(g).$$

■

4. *Si π et ρ sont équivalents, alors leurs caractères sont égaux : $\mathcal{X}_\pi = \mathcal{X}_\rho$.*

Démonstration. Si $T \in \mathrm{Hom}_G(\pi, \rho)$ est inversible, alors π et ρ sont équivalentes. De la on a grâce aux propriétés de la trace :

$$\mathcal{X}_\rho(g) = Tr(T\pi(g)T^{-1}) = Tr(TT^{-1}\pi(g)) = Tr(Id_{\mathbb{C}}\pi(g)) = Tr(\pi(g)) = \mathcal{X}_\pi(g).$$

■

■ **Lemme 18.** *Soit (π, V) une représentation d'un groupe fini G*[23].

1. $\mathcal{X}_\pi(1) = dim_{\mathbb{C}}(V)$.
2. $\mathcal{X}_\pi(g) = \overline{\mathcal{X}_\pi(g^{-1})} \quad \forall g \in G$.
3. $\mathcal{X}_\pi(g) = \mathcal{X}_\pi(hgh^{-1}) \quad g, h \in G$.

■ **Théorème 19.** *Soient (π, V) et (ρ, W) deux représentations d'un groupe fini G. Alors $\langle \mathcal{X}_\rho | \mathcal{X}_\pi \rangle_G = dim_{\mathbb{C}}(Hom_G(\pi, \rho))$*[24].

23. Lemme 3.4.18, page 105, [DSV03]
24. Théorème 3.4.19, page 106, [DSV03]

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{X}_\rho | \mathcal{X}_\pi \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathcal{X}_\rho(g) \overline{\mathcal{X}_\pi(g)} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathcal{X}_\rho(g) \mathcal{X}_\pi(g^{-1}) \quad \text{Par le Lemme 18(2)} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathcal{X}_\rho(g) \mathcal{X}_{\pi^*}(g) \quad \text{Par la Proposition 17(1)} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathcal{X}_{\rho \otimes \pi^*} \quad \text{Par la Proposition 17(3)} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Tr(\rho \otimes \pi^*)(g) \\
&= \dim_{\mathbb{C}}(W \otimes V^*)^G \quad \text{Par la Proposition 17(4) et Proposition 15(4).}
\end{aligned}$$

Afin de prouver que $\dim_{\mathbb{C}}(W \otimes V^*)^G = \dim_{\mathbb{C}}(Hom_G(\pi, \rho))$, une étape supplémentaire est nécessaire. Soit σ une représentation sur $Hom(V, W)$ définie comme suit :

$$\sigma(g)(T) = \rho(g) T \pi(g^{-1}) \ \forall g \in G, T \in Hom(V, W).$$

La représentation $\rho \otimes \pi^*$ est équivalente à σ [25]. De la il suit que $T \in Hom(V, W)$ est $\sigma(G)$-fixée si et seulement si T entrelace π et ρ, c'est à dire si $T \in Hom_G(\pi, \rho)$. De là, il suit que :

$$\dim_{\mathbb{C}}(W \otimes V^*)^G = \dim_{\mathbb{C}}(Hom(V, W)^G) = \dim_{\mathbb{C}}(Hom_G(V, W)).$$

■

■ **Corollaire 20.** *Soit (π, V) une représentation d'un groupe fini G avec $V \neq 0$. Si on écrit $\pi = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus ... \oplus \rho_k$ où les $\rho_1, ..., \rho_k$ sont des représentations irréductibles de G. (Rendu possible par Proposition 14(3)).*
Soit (ρ, W) une représentation irréductible de G. Le nombre de ces ρ_i équivalentes à ρ est égal à $\langle \mathcal{X}_\pi \mid \mathcal{X}_\rho \rangle_G$. En particulier, ce nombre ne dépend pas de la décomposition de π en une somme directe de représentations irréductibles choisie [26].

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{X}_\pi | \mathcal{X}_\rho \rangle &= \sum_{i=1}^{k} \langle \mathcal{X}_{\rho_i} \mid \mathcal{X}_\rho \rangle_G \quad \text{Par Proposition 17(2)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\rho_i, \rho) \quad \text{Par Théorème 19 .}
\end{aligned}$$

Par le Lemme de Shur (Théorème 10)

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\rho, \rho_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \text{ est équivalent à } \rho_i \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

25. Par l'exemple 3.4.11, page 101, [DSV03]
26. Corollaire 3.4.20, page 107, [DSV03]

Ainsi $\langle \mathcal{X}_\pi \mid \mathcal{X}_\rho \rangle$ est effectivement le nombre des ρ_i équivalents à ρ. Cela nous donne un critère très efficace pour l'irréducibilité. ■

■ **Corollaire 21.** *Soit (π, V) une représentation d'un groupe fini G, avec $V \neq \{0\}$. La représentation π est irréductible si et seulement si*[27] *:*

$$\langle \mathcal{X}_\pi \mid \mathcal{X}_\pi \rangle_G = 1 \ .$$

Démonstration. Si π est irréductible, alors par Théorème 19 et Théorème 10 on a que :

$$\langle \mathcal{X}_\pi \mid \mathcal{X}_\pi \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\pi, \pi) = 1$$

Si π n'est pas irréductible, alors par Proposition 14(2) on peut écrire V comme un somme directe de sous-espaces invariants non nuls : W, W'.

$$V = W \oplus W'.$$

Alors les applications linéaires $V \to V : (w, w') \mapsto (w, 0)$ et $V \to V : (w, w') \mapsto (0, w')$ sont linéairement indépendants dans $\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi)$, tel que par le Théorème 19 on a :

$$\langle \mathcal{X}_\pi \mid \mathcal{X}_\pi \rangle_G = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(\pi, \pi) \geqslant 2.$$

■

27. Corollaire 3.4.21, page 107, [DSV03]

Bibliographie

[DSV03] Giuliana Davidoff, Peter Sarnak et Alain Valette. *Elementary Number Theory, Group Theory, and Ramanujan Graphs*. Sous la dir. de London Mathematical Society Student Texts. 1re éd. Cambridge University Press, 2003.

[KS10] Yvette Kosmann-Schwarzbach. *Groups and Symmetries*. 1re éd. Springer New York, 2010.

[Mar11] Stuart Martin. « Representation Theory ». Notes of the course given by Dr. Stuart Martin at the Cambridge Universiry. 2011.

[Wik] Nov. 2016. url : `https://en.wikipedia.org/wiki/Representation_theory_of_finite_groups`.