



UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

Christian Vogt und Rahel Schuhmacher

Asymptotische Eigenschaften von Eigenwerten eines Expander Graphen

Proseminar Herbstsemester 2016

Inhaltsverzeichnis

	Page
1 Einführung	2
2 Ramanujan Graphen	3
3 Wichtige Hilfsmittel	5
4 Theoreme	11
5 Fazit	17

Kapitel 1

Einführung

In unserem Kapitel des Buches sehen wir zwei wichtige Theoreme, welche es uns erlauben einen Ramanujan Graphen zu definieren. Solche Graphen werden in einem zweiten Teil mit einigen Hilfsmittel bewiesen.

Folgende Begriffe werden wir immer wieder in Theoremen benutzen

- k-regulär: Von jeder Ecke gehen genau gleich viele Kanten weg
- zusammenhängend: Jede Ecke ist mit mindestens einer andern verbunden
- endlich: Es gibt nur eine endliche Anzahl Ecken
- Adjazenzmatrix: Gibt die Anzahl der Kanten zwischen zwei Ecken an, ist eine quadratische Matrix
- Spektrum eines Graphen: Die Eigenwerte der Adjazenzmatrix werden der Grösse nach geordnet; der grösste Eigenwert $\mu_0 = k$, wenn der Graph k-regulär
- triviale Eigenwerte: In einem k-regulären Graph k und -k
- Einfacher Graph: Zwischen zwei Ecken gibt es maximal eine Kante

Kapitel 2

Ramanujan Graphen

Um die Ramanujan Graphen zu definieren brauchen wir zwei Theoreme, die es uns erlauben die Eigenwerte der Adjazenzmatrix einzuschränken.

Theorem 2.0.1. *Sei eine Familie von Graphen $(X_m)_{m \geq 1}$, die k -regulär, zusammenhängend und endlich sind. Falls gilt $|V_m| \rightarrow \infty$, wenn $m \rightarrow \infty$, dann können wir sagen*

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \mu_1(X_m) \geq 2\sqrt{k-1}. \quad (2.1)$$

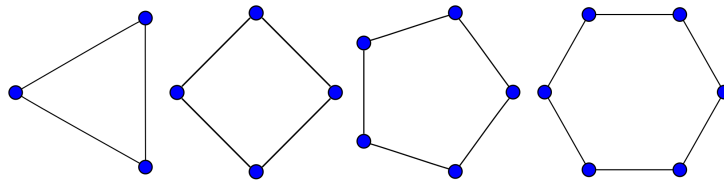


Abbildung 2.1: Familie von 2-regulären Graphen

Beispiel 2.0.2. Wir haben also für die ersten beiden Graphen folgendes:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Mit Eigenwerten } \mu_0 = 2, \mu_1 = -1, \mu_2 = -1$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Mit den Eigenwerten } \mu_0 = 2, \mu_1 = 0, \mu_2 = 0 \text{ und } \mu_3 = -2$$

Somit sehen wir, dass das Theorem noch nicht erfüllt wird, aber μ_1 aufsteigend ist, intuitiv sollte für ein grosses m das Theorem gelten.

Definition 2.0.3. Der Girth(oder Tailenweite) $g(X)$ eines Graphen ist die Länge des kürzesten Zyklus eines Graphen X . Wenn X ein Baum ohne einen Zyklus ist, ist $g(X) = \infty$.

Example 2.0.4.

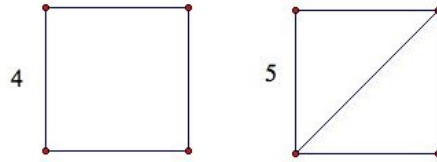


Abbildung 2.2: Links $g=4$ und rechts $g=3$

Theorem 2.0.5. Sei $(X_m)_{m \geq 1}$ eine Familie von Graphen, die k -regulär, zusammenhängend und endlich sind. Falls gilt $g(X_m) \rightarrow \infty$ wenn $m \rightarrow \infty$, dann können wir sagen

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \mu(X_m) \leq 2\sqrt{k-1}. \quad (2.2)$$

Wobei $\mu(X_m)$ der kleinste nicht triviale Eigenwert ist.

Mit Hilfe dieser 2 Theoreme können wir nun einen Ramanujan Graphen definieren.

Definition 2.0.6. Ein Graph X , der k -regulär, zusammenhängend und endlich ist, wird Ramanujan Graph genannt, wenn jeder nicht triviale Eigenwert der Adjazenzmatrix folgende Gleichung erfüllt

$$|\mu| \leq 2\sqrt{k-1}. \quad (2.3)$$

Bis im Mai 2015 konnte man nur für bestimmte k einen Ramanujan Graphen definieren. Solche k waren: $k = 3$, $k = p+1$ für eine ungerade Primzahl und $k = q+1$ für eine Potenz einer Primzahl. Nun, nach dem 25. Mai 2015, konnte man aber für jedes k ein Beispiel konstruieren, was nicht immer einfach ist.

Kapitel 3

Wichtige Hilfsmittel

Wir betrachten einen einfachen Graph, d.h. zwischen zwei Ecken gibt es maximal eine Kante und somit besteht die Adjazenzmatrix nur aus Einsen und Nullen.

Definition 3.0.1. Sei eine Matrix (A_r) , welche angibt, wie viele Wege der Länge r von x nach y gehen, ohne backtracking. Genauer gilt:

$$(A_r)_{xy} = \text{Anzahl der Wege von } x \text{ nach } y \text{ der Länge } r, \text{ ohne backtracking.} \quad (3.1)$$

Ohne backtracking bedeutet, dass eine bereits begangene Kante nicht noch ein zweites Mal genutzt werden kann. Weiter bemerken wir, dass $A_0 = Id$ und $A_1 = A$ ist.

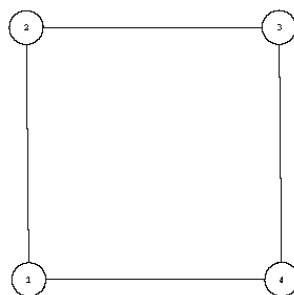
Lemma 3.0.2. *Es gilt*

$$A_1^2 = A_2 + k \cdot Id \quad (3.2)$$

$$A_1 A_r = A_r A_1 = A_{r+1} + (k-1)A_r \quad (3.3)$$

Dazu betrachten wir folgendes Beispiel.

Example 3.0.3.



$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit sehen wir, dass auch in einem einfachen Beispiel Gleichung 3.1 erfüllt wird.

Beweis. Wir machen die Richtung des Beweises, die nicht im Buch steht.

Wir wollen zeigen, dass $A_1 A_r = A_{r+1} + (k-1)A_{r-1}$.

Betrachte die Einträge $(A_1 A_r)_{xy}$, welches die Anzahl Wege von x nach y der Länge $r+1$ angibt. Dies ist so zusammengesetzt, dass die Matrix A_1 einen Weg der Länge 1 gibt und die Matrix A_r einen Weg der Länge r . Nehme nun einen Weg $(x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{r+1} = y)$ der Länge $r+1$. Es muss nun gezeigt werden, dass alle Wege ohne backtracking sind, darum betrachten wir 2 Fälle, welche es uns erlauben den Fall des backtrackings auszuschliessen:

- $x_2 \neq x$: dann wissen wir, dass dort kein backtracking ist, da in der Matrix A_r kein backtracking ist. Somit wissen wir, dass auch (A_{r+1}) alle Wege beschreibt, die ohne backtracking sind.
- $x_2 = x$: in diesem Fall gibt es backtracking beim 2. Schritt von x_1 nach x_2 . Doch dies wollen wir verhindern, indem wir in x_1 nur die übrigen Kanten anschauen, welche $k-1$ mögliche sind. Dann bleiben Wege der Länge $r-1$, die ohne backtracking sind. Was uns zu einem Total führt von $(k-1)A_{r-1}$

Wenn wir beide Fälle zusammenzählen, erhalten wir $A_1 A_r = A_{r+1} + (k-1)A_{r-1}$. □

Lemma 3.0.4. *Nun betrachten wir die erzeugende Funktion von den A_r , welche gegeben ist durch:*

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r t^r = \frac{1-t^2}{1-At+(k-1)t^2}. \quad (3.4)$$

Um dieses Lemma richtig zu verstehen, werden wir es folgendermassen umformen:

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} A_r t^r \right) (Id - At + (k-1)t^2 Id) = (1-t^2)Id. \quad (3.5)$$

Wir schreiben dies so, weil wir mit Matrizen arbeiten, also muss man jeden Term, der ohne Matrix aufgeschrieben ist, mit der Einheitsmatrix multiplizieren.

Beweis.

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{\infty} A_r t^r Id - \sum_{r=0}^{\infty} A_r t^r At + \sum_{r=0}^{\infty} A_r t^r (k-1)^2 Id \\ = & \underbrace{\sum_{r=3}^{\infty} t^r (A_r - A_{r-1}A + A_{r-2}(k-1)t^2 Id) + A_2 Id t^2 - A_1 A t^2 + (k-1)A_0 t^2 + A_1 Id t - A_0 A_1 Id t + A_0 Id t^0}_{=0, \text{ da } A_r A_1 = A_{r+1} + (k-1)A_{r-1}} \end{aligned}$$

$$= (A_1^2 - kId)Idt^2 - A_1^2t^2 + (k-1)Idt^2A_1Idt - IdA_1Idt + Id = (1-t^2)Id$$

□

Die Gleichung aus dem vorherigen Lemma ist nicht sehr handlich, weil $1-t^2$ im Zähler steht. Dank des nächsten Lemmas werden wir diesen Term streichen können.

Lemma 3.0.5.

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_m t^m = \frac{1}{1-At-(k-1)t^2}, \text{ wobei } T_m = \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} A_{m-2r} \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Beweis. Siehe im Buch. □

Als nächstes Hilfsmittel führen wir die Chebyshev Polynome des 2. Grades ein.

Definition 3.0.6. Chebyshev Polynome des 2. Grades; diese werden als Polynome vom Grad m in $\cos\theta$ ausgedrückt:

$$U_m(\cos\theta) = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta} \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

So gilt für $m=0,1,2$: $U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, U_2(x) = 4x^2 - 1$. Diese Werte erhält man indem man die Chebyshev Polynome des 2. Grades in $0,1,2$ auswertet, und dann dank trigonometrischen Formeln auf ein Ausdruck nur noch von $\cos\theta$ ausgedrückt, danach wird $\cos\theta$ durch die Variable x ersetzt.

Als nächstes werden wir die Rekursionsformel aufschreiben, welche dank trigonometrischen Formeln erhalten wird:

$$U_{m+1}(x) = 2xU_m(x) - U_{m-1}(x). \quad (3.8)$$

Mithilfe des obigem Lemma erhalten wir:

$$\sum_{m=0}^{\infty} U_m(x)t^m = \frac{1}{1-2xt+t^2}. \quad (3.9)$$

Schlussendlich können wir für die Polynome $(k-1)^{\frac{m}{2}}U_m\left(\frac{x}{2\sqrt{k-1}}\right)$, dessen erzeugende Funktion herstellen. In diesem Falle, wie es im Beweis gemacht wird, brauchen wir einen Variabelwechsel, welcher es uns erlaubt vereinfacht die Rekursionsformel anzuwenden:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (k-1)^{\frac{m}{2}}U_m\left(\frac{x}{2\sqrt{k-1}}\right)t^m = \frac{1}{1-xt+(k-1)t^2}. \quad (3.10)$$

Beweis. (3.10):

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (k-1)^{\frac{m}{2}}U_m\left(\frac{x}{2\sqrt{k-1}}\right)t^m &= \frac{1}{1-xt+(k-1)t^2} \iff \\ (1-xt+(k-1)t^2) \sum_{m=0}^{\infty} (k-1)^{\frac{m}{2}}U_m\left(\frac{x}{2\sqrt{k-1}}\right)t^m &\stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} t^{m+2} \left((k-1)^{\frac{m+2}{2}} U_{m+2} \left(\frac{x}{2\sqrt{k-1}} \right) - x(k-1)^{\frac{m+1}{2}} U_{m+1} \left(\frac{x}{2\sqrt{k-1}} \right) + (k-1)^{\frac{m+2}{2}} U_m \left(\frac{x}{2\sqrt{k-1}} \right) \right) \\
& + \underbrace{(k-1) U_2 \left(\frac{x}{2\sqrt{k-1}} \right) t^2}_{=x^2 t^2 - (k-1)t^2} - \underbrace{x(k-1)^{\frac{1}{2}} U_1 \left(\frac{x}{2\sqrt{k-1}} \right) t^2}_{=x^2 t^2} + \underbrace{(k-1)(k-1)^0 U_0 \left(\frac{x}{2\sqrt{k-1}} \right) t^2}_{(k-1)t^2} \\
& \underbrace{\hspace{10em}}_{=0} \\
& + \underbrace{(k-1)^{\frac{1}{2}} U_1 \left(\frac{x}{2\sqrt{k-1}} \right) t^1}_{=xt} - \underbrace{x(k-1)^0 U_0 \left(\frac{x}{2\sqrt{k-1}} \right) t^1}_{=xt} + \underbrace{(k-1)^0 U_0 \left(\frac{x}{2\sqrt{k-1}} \right) t^0}_{=1} \\
& \underbrace{\hspace{10em}}_{=0} \\
& = \sum_{m=0}^{\infty} t^{m+2} (k-1)^{\frac{m+2}{2}} \left(U_{m+2} \left(\frac{x}{2\sqrt{k-1}} \right) - x(k-1)^{-\frac{1}{2}} U_{m+1} \left(\frac{x}{2\sqrt{k-1}} \right) + U_m \left(\frac{x}{2\sqrt{k-1}} \right) \right) + 1
\end{aligned}$$

Jetzt machen wir folgenden Variabelwechsel:

$$\frac{x}{2\sqrt{k-1}} = y$$

Also erhalten wir:

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^{m+2} (k-1)^{\frac{m+2}{2}} \underbrace{\left(U_{m+2}(y) - 2y U_{m+1}(y) + U_m(y) \right)}_{=0, \text{ da } U_{m+1}(y) = 2y U_m(y) - U_{m-1}(y)} + 1 = 1$$

=0

□

Beweis. (3.7) => (3.8):

$$U_m(\cos\theta) = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}$$

Beweis via Induktion:

$$m = 0 : U_0(\cos\theta) = 1$$

$$m = 1 : U_1(\cos\theta) = 2\cos\theta$$

$$m = 2 : U_2(\cos\theta) = 4\cos^2\theta - 1$$

Somit ist die Aussage wahr für $m \leq 2$. Nun nehmen wir an, dass die Aussage stimmt für $\leq m$.

So bleibt zu zeigen, dass dies auch für $m+1$ stimmt:

$$\begin{aligned}
U_{m+1} &= \frac{\sin(m+2)\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(m+1)\theta \cdot \cos\theta + \cos(m+1)\theta \cdot \sin\theta}{\sin\theta} \\
&= \cos\theta \cdot U_m(\cos\theta) + \cos(m+1)\theta = \cos\theta \cdot U_m(\cos\theta) + \cos(m\theta)\cos\theta - \sin(m\theta)\sin\theta \\
&= \cos\theta \cdot U_m(\cos\theta) + \cos(m\theta)\cos\theta - U_{m-1}(\cos\theta) \cdot \sin^2\theta \\
&= \cos\theta \cdot U_m(\cos\theta) + \cos(m\theta)\cos\theta - U_{m-1}(\cos\theta) + U_{m-1}(\cos\theta) \cdot \cos^2\theta
\end{aligned}$$

Noch zu zeigen : $\cos(m\theta)\cos\theta + U_{m-1}(\cos\theta) \cdot \cos^2\theta = \cos\theta \cdot U_m(\cos\theta)$

$$U_m(\cos\theta) = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(m\theta)\cos\theta + \sin\theta \cdot (m\theta)}{\sin\theta} = U_{m-1}(\cos\theta)\cos\theta + \cos(m\theta)$$

(3.8) \Rightarrow (3.9):

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} U_m(x)t^m &\stackrel{!}{=} \frac{1}{1-2xt+t^2} \iff (1-2xt+t^2) \left(\sum_{m=0}^{\infty} U_m(x)t^m \right) \stackrel{!}{=} 1 \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} U_m(x)t^m - 2x \sum_{m=0}^{\infty} U_m(x)t^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} U_m(x)t^{m+2} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} t^m \underbrace{(U_m(x) - 2xU_{m-1}(x) + U_{m+2}(x))}_{=0, \text{ da } U_{m+1}(x) = 2xU_m(x) - U_{m-1}(x)} + \underbrace{U_1(x)t - 2xU_0(x)t + t^0}_{=0} = 1 \end{aligned}$$

□

Bis hier haben wir die Polynome immer für einen bestimmten Wert x berechnet, Ziel der nächsten Proposition ist es einen Ausdruck zu erhalten, in welchem wir die Adjazenzmatrix betrachten:

Proposition 3.0.7.

$$T_m = (k-1)^{\frac{m}{2}} U_m \left(\frac{A}{2\sqrt{k-1}} \right) \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

Diese Gleichung ist richtig: denn wenn man die Definition der T_m und dessen erzeugende Funktion (3.6) nimmt, dies mit dem Resultat in (3.10) vergleicht, braucht man noch x mit A zu vertauschen, und erhalten dann diesen Ausdruck für T_m .

Aus dieser Proposition folgen zwei Formeln für die Spur von T_m :

$$Tr T_m = (k-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{m=0}^{n-1} U_m \left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{k-1}} \right), \quad \text{wobei } \mu_j \text{ Eigenvektor von } A \text{ ist.} \quad (3.12)$$

$$Tr T_m = \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} Tr A_{m-2r} = \sum_{x \in V} \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} (A_{m-2r})_{xx} \quad (3.13)$$

Notation 3.0.8. Sei $f_{l,x}$ die Anzahl der Wege der Länge l in x , ohne backtracking, mit Anfangs- und Endpunkt x , wobei x in der Menge der Eckpunkte ist.

Also erhalten wir einen Ausdruck für $(A_l)_{xx}$, den wir später öfters brauchen werden:

$$f_{l,x} = (A_l)_{xx}.$$

Dank dieser Notation erhalten wir:

Theorem 3.0.9.

$$\sum_{x \in V} \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} \underbrace{(f_{m-2r,x})}_{\geq 0} = (k-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} U_m \left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{k-1}} \right) = Tr T_m \geq 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.14)$$

In (3.14) machen wir (3.12) = (3.13), und ersetzen den Ausdruck A_{m-2r} mit $f_{m-2r,x}$. Die Gleichung (3.14) muss immer ≥ 0 sein, da $f_{m-2r,x} \geq 0$ ist, und dies weil $f_{m-2r,x}$ die Anzahl Wege der Länge $m - 2r$ mit Anfangs- und Endpunkt x sind, also gibt es zwei Fälle: entweder existieren keine solche Wege, und somit ist $f_{m-2r,x} = 0$, oder, wenn es solche Wege gibt im Graphen, muss dessen Anzahl > 0 sein, also $f_{m-2r,x} > 0$, da $r \leq \frac{m}{2}$.

Kapitel 4

Theoreme

Um eine Verbesserung des ersten Theorems zu geben, brauchen wir zuerst ein technisches Resultat.

Proposition 4.0.1. *Sei $L \geq 2$ und $\epsilon > 0$. Dann existiert eine Konstante $C = C(L, \epsilon) > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes Wahrscheinlichkeitsmass ν auf $[-L, L]$ mit $\int_{-L}^L U_m(\frac{x}{2}) d\nu(x) \geq 0$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\nu[2 - \epsilon, L] \geq C. \quad (4.1)$$

Ein Wahrscheinlichkeitsmass auf eine Menge Ω ist eine Funktion auf der gewollten Teilmenge in Ω und mit der Eigenschaft, dass die Summe über all diese Funktionen gleich 1 ist.

Beweis. Der Beweis wird in 5 Schritten gemacht. Immer wieder brauchen wir folgendes

- $X_m(x) = U_m(\frac{x}{2})$, Polynome mit $X_m(2\cos(\Theta)) = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\Theta}$
- Rekursionsformel: $X_{m+1}(x) = xX_m(x) - X_{m-1}$
- Nullstellen von $X_m = 2\cos(\frac{l\pi}{m+1})$
- Grösste Nullstelle: $\alpha_m = 2\cos(\frac{\pi}{m+1})$

Schritt 1 In diesem Schritt wollen wir zeigen, dass für $k \leq l$:

$$X_k X_l = \sum_{m=0}^{m-1} X_{k+l-2m} \quad (4.2)$$

Dies beweisen wir via Induktion über k , mit $X_0(x) = 1$ und $X_1(x) = x$.

Der vollständige Beweis zu Schritt 1 steht im Buch.

Schritt 2

$$\frac{X_m(x)}{x - \alpha_m} = \sum_{m=0}^{m-1} X_{m-1-i}(\alpha_m) X_i(x) \quad (4.3)$$

Diese Gleichung beweisen wir in dem wir den Nenner auf die andere Seite nehmen und so mit Hilfe der Rekursionsformel auf das richtige Resultat kommen.

Den vollständigen Beweis zu Schritt 2 findet man im Buch.

Schritt 3 Wir wollen zeigen, dass $Y_m(x) = \frac{X_m(x)^2}{x - \alpha_m}$ als $Y_m(x) = \sum_{i=0}^{m-1} y_i X_i(x)$ geschrieben werden kann, wenn $y_i \leq 0$.

Mit Hilfe von Schritt 2 finden wir, dass $Y_m(x) = \sum_{i=0}^{m-1} X_{m-1-i}(\alpha_m) X_i X_m$. Wir multiplizieren die Gleichung von Schritt 2 mit $X_m(x)$. Nun betrachten wir die Folge der $\alpha_m = 2\cos(\frac{\pi}{m+1})$ und können sehen, dass sie gegen 2 konvergiert, wenn m gegen unendlich geht. Da $2\cos(\frac{\pi}{m+1}) \rightarrow 2\cos(0) = 2$, wenn m gegen unendlich geht. Somit gilt für $j < m$ mit $\alpha_j < \alpha_m$, dass $X_j(\alpha_m) > 0$, da α_j die grösste Nullstelle von Y_m ist. Das heisst alle Koeffizienten in Y_m sind positiv.

Schritt 4 Seien $\epsilon > 0$ und $L \geq 2$. Dann gilt für jedes Wahrscheinlichkeitsmass ν auf $[-L, L]$ mit $\int_{-L}^L X_m(x) d\nu(x) \geq 0 \forall m \in \mathbb{N}$ gilt $\nu[2 - \epsilon] > 0$.

Dies zeigen wir mit einem Widerspruch. Dazu nehmen wir an: $\nu[2 - \epsilon] = 0$

Wir wissen:

- $\text{Supp}(\nu) \subset [-L, 2 - \epsilon]$
- wenn m gross ist, gilt $\alpha_m > 2 - \epsilon$

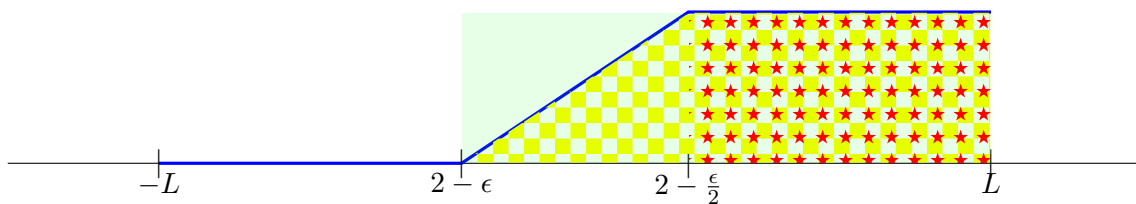
Daraus können wir sagen, dass $Y_m(x) \leq 0$ für $x \leq \alpha_m$, und somit ist $\int_{-L}^L Y_m(x) d\nu(x) \leq 0$.

Aus Schritt 3 wissen wir jedoch, dass das Integral grösser gleich 0 sein muss. Somit muss $\int_{-L}^L Y_m(x) d\nu(x) = 0$ sein.

Weiter definieren wir eine Menge $F_m = 2\cos(\frac{l\pi}{m+1}) : 1 \leq l \leq m$, welches alle Nullstellen des Polynoms Y_m beinhaltet. Wir wissen jedoch auch, dass $F_m = \text{supp}(\nu)$ ist, was uns ein Widerspruch zu $F_{m+1} \cap F_{m+2} = \emptyset$ gibt. Da $\text{supp}(\nu)$ alle Nullstellen beinhaltet, also auch die von F_{m+1} und F_{m+2} . Somit ist unsere Annahme falsch und Schritt 4 bewiesen.

Coda Seien $\epsilon > 0$ und $L \geq 2$. Definiere nun eine stetige Funktion f

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 - \epsilon \\ 1 & x \geq 2 - \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{2}{\epsilon}(x - 2 + \epsilon) & 2 - \epsilon \leq x \leq 2 - \frac{\epsilon}{2} \end{cases} \quad (4.4)$$



Somit gilt für jedes Wahrscheinlichkeitsmass:

$$\nu[2 - \epsilon, L] \leq \int_{-L}^L f(x) d\nu(x) \leq \nu[2 - \frac{\epsilon}{2}, L]$$

Sei die Menge \emptyset der Wahrscheinlichkeitsmasse ν auf $[-L, L]$ so, dass $\int_{-L}^L X_m(x) d\nu(x) \geq 0 \forall m \geq$

1. Aus Schritt 4 wissen wir, dass $\int_{-L}^L X_m(x) d\nu(x) > 0$.

Nun betrachten wir die schwache Topologie, welche folgendermassen definiert ist:

Für eine stetige Funktion g gilt

$$\nu_n \xrightarrow{g} \nu \Rightarrow \int_{-L}^L g(x) d\nu_n(x) \longrightarrow \int_{-L}^L g(x) d\nu(x)$$

Nun können wir die schwache Topologie verwenden und da drinn ist \wp kompakt. Da f stetig ist, können wir eine Karte definieren:

$$\wp \longrightarrow \mathbb{R}^* : \nu \longmapsto \int_{-L}^L f(x) d\nu(x)$$

welche schwach stetig ist.

Dadurch, dass \wp kompakt ist, wissen wir, dass eine Konstante $C = C(\epsilon, L) > 0$ existiert, sodass $\int_{-L}^L f(x) d\nu(x) \geq C \forall \nu \in \wp$.

$$\Rightarrow \nu[2 - \epsilon, L] \geq C(\epsilon, L)$$

□

Mit Hilfe dieser technischen Propostion können wir die minimale Anzahl der Eigenwert von endlichen, zusammenhängenden, k -regulären Graphen bestimmen.

Theorem 4.0.2. *Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert eine Konstante $C = C(\epsilon, k)$, sodass für jeden endlichen, zusammenhängenden, k -regulären Graph X mit $|V| = n$ gilt, dass die Anzahl der Eigenwerte von X in einem Intervall $[(2 - \epsilon)\sqrt{k - 1}, k]$ mindestens $C \cdot n$ ist.*

Beweis. Sei $L = \frac{k}{\sqrt{k-1}} \geq 2$ und $\nu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \delta_{\frac{\mu_j}{\sqrt{k-1}}}$.

Wobei das Dirac-Mass für $a \in [-L, L]$ ein Wahrscheinlichkeitsmass ist, mit $\int_{-L}^L f(x) d\delta_a(x) = f(a)$ für jede stetige Funktion auf $[-L, L]$.

Somit gilt für jedes Wahrscheinlichkeitsmass ν auf $[-L, L]$, dass $\int_{-L}^L U_m(x) d\nu(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_m(\frac{\mu_j}{2\sqrt{k-1}})$.

Dies ist grösser als Null wegen der Spurformel.

Jetzt ist alles erfüllt, damit wir die vorherige Proposition anwenden können. Das heisst, es existiert ein $C = C(\epsilon, k) > 0$, sodass $\nu[2 - \epsilon, L] \geq C$.

Somit haben wir:

$$\begin{aligned} \nu[2 - \epsilon, L] &= \frac{1}{n} \times (\text{Anzahl der } j \text{ mit } 2 - \epsilon \leq \frac{\mu_j}{\sqrt{k-1}} \leq L) \\ &= \frac{1}{n} \times (\text{Anzahl Eigenwerte von } X \text{ in } [(2 - \epsilon)\sqrt{k - 1}, k]). \end{aligned}$$

Daraus wissen wir, $\nu[2 - \epsilon, L] = \frac{1}{n} \times (\text{Anzahl der Eigenwerte im Intervall}) \geq C$

\Rightarrow Anzahl Eigenwerte $\geq n \cdot C$.

□

Theorem 4.0.3. *Sei $L = \frac{k}{\sqrt{k-1}}$. Sei $(X_m)_{m \geq 1}$ eine Folge von zusammenhängenden, k -regulären, endlichen Graphen, für welche $g(X_m) \rightarrow \infty$, wenn $m \rightarrow \infty$. Wir definieren jetzt das Mass $\nu_m = \nu(X_m)$ auf $[-L, L]$ als*

$$\nu_m = \frac{1}{|X_m|} \sum_{j=0}^{|X_m|-1} \frac{\delta_{\mu_j(X_m)}}{\sqrt{k-1}}.$$

Somit gilt für jede Funktion f , die stetig auf dem Intervall $[-L, L]$ ist:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(x) d\nu_m(x) = \int_{-2}^2 f(x) \sqrt{4-x^2} \frac{dx}{2\pi}. \quad (4.5)$$

Bedeutung von ν_m : Folge von Massen, bei denen man das Dirac-Mass für jedes μ_j anwendet. Das Mass in (4.4) ist sehr identisch zum Mass im Theorem 4.0.1, nur dass wir in diesen Fall eine Folge X_m von Graphen betrachten.

Dieses Theorem bedeutet nur, dass die Folge von Massen $(\mu_m)_{m \geq 1}$ auf $[-L, L]$ zum Mass ν auf $[-2, 2]$ schwach konvergiert, welches gegeben ist durch $d\nu(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi} dx$. Also muss man um auf den zweiten Ausdruck der Gleichung zu kommen diesen Variabelwechsel machen. Das hauptsächliche Ziel dieses Theorems ist eine Verbindung herzustellen zwischen der Folge von Massen, und dem Mass, welches auf dem Intervall $[-L, L]$ definiert sind.

Um dieses Theorem zu beweisen werden wir verschiedene Hilfsmittel benützen die wir weiter oben eingeführt haben.

Beweis. Für ein fixiertes $n \geq 1$ und ein m gross genug, so dass $g(X_m) > n$, sei:

$$f_{n-2r,x} = 0 \quad \forall x \in X_m \quad \text{und} \quad 0 \leq r \leq \frac{n}{2}$$

$f_{n-2r,x} = 0$ heisst dass es keinen Weg der Länge $n-2r$, ohne backtracking, von x nach x gibt, da der kleinste Weg von x nach x $g(X_m) > n > n - 2r$ ist.

Also haben wir, dank des Theorem 3.0.6, dass:

$$\sum_{x \in V} \sum_{0 \leq r \leq \frac{n}{2}} (f_{n-2r,x}) = 0 = (k-1)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{|X_m|-1} U_n \left(\frac{\mu_j(X_m)}{2\sqrt{k-1}} \right)$$

Und somit bekommen wir:

- $\int_{-L}^L U_n \left(\frac{x}{2} \right) d\nu_m(x) = \frac{1}{|X_m|} \sum_{j=0}^{|X_m|-1} \frac{\delta_{\mu_j(X_m)}}{\sqrt{k-1}} = \frac{1}{|X_m|} \frac{1}{(k-1)^{\frac{n}{2}}} \sum_{x \in V} \sum_{0 \leq r \leq \frac{n}{2}} (f_{n-2r}) = 0$
- $\int_{-L}^L U_n \left(\frac{x}{2} \right) d\nu_m(x) = 1$, da $U_0 \left(\frac{x}{2} \right) = X_0(x) = 1$

Für $n \geq 0$ werden wir $\int_{-L}^L U_n \left(\frac{x}{2} \right) d\nu(x)$ berechnen, indem wir den Variablenwechsel $x = 2\cos\theta$ brauchen:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L U_n \left(\frac{x}{2} \right) d\nu(x) &= \int_0^\pi U_n(\cos\theta) 2\sin^2\theta \frac{d\theta}{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2\sin((n+1)\theta) \sin\theta d\theta = \delta_{n,0} \end{aligned}$$

$\delta_{n,0}$ steht für das Kronecker-Delta, und bedeutet:

$$\delta_{n,0} = \int_{-L}^L U_n \left(\frac{x}{2} \right) d\nu(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = 0 \\ 0 & \text{wenn } n \neq 0 \end{cases}$$

Und somit gilt für jedes $n \geq 0$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-L}^L U_n \left(\frac{x}{2} \right) d\nu_m(x) = \int_{-L}^L U_n \left(\frac{x}{2} \right) d\nu(x)$$

Diese Gleichung stimmt, da das Integral für $n = 0$ mit den Massen ν_m und dem Mass ν gleich eins ist, und das Integral für $n > 0$ mit den Massen ν_m und dem Mass ν gleich null ist. Insofern stimmt diese Gleichung für jedes $n \geq 0$.

Weiter sind $U_n \left(\frac{x}{2} \right)$ Polynome. Mit der Rekursionsformel für die Polynome, welche wir oben gesehen haben, ist der lineare Span $U_0 \left(\frac{x}{2} \right), U_1 \left(\frac{x}{2} \right), \dots, U_n \left(\frac{x}{2} \right)$ gleich dem Raum der Polynome mit höchstem Grad n . Und somit erhalten wir:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-L}^L p(x) d\nu_m(x) = \int_{-L}^L p(x) d\nu(x) \quad \forall p(x)$$

Das heisst, wir können die Polynome $U \left(\frac{x}{2} \right)$ mit den Polynomen $p(x)$ ersetzen.

Sei nun f eine stetige Funktion auf $[-L, L]$ und sei $\epsilon > 0$. Da f stetig auf einem geschlossenem Intervall, ist f kompakt auf $[-L, L]$. Und somit können wir das Approximation's Theorem von Weierstrass anwenden für ein Polynom p , so dass:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Somit:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-L}^L f(x) d\nu_m(x) - \int_{-L}^L f(x) d\nu(x) \right| \\ = & \left| \int_{-L}^L f(x) d\nu_m(x) - \int_{-L}^L p(x) d\nu_m(x) + \int_{-L}^L p(x) d\nu(x) - \int_{-L}^L p(x) d\nu_m(x) + \int_{-L}^L p(x) d\nu(x) - \int_{-L}^L f(x) d\nu(x) \right| \\ \leq & \underbrace{\left| \int_{-L}^L (f(x) - p(x)) d\nu_m(x) \right|}_{\leq \int_{-L}^L |f(x) - p(x)| d\nu_m(x) \leq \frac{\epsilon}{3} \cdot \underbrace{\nu_m([-L, L])}_{=1} = \frac{\epsilon}{3}} + \left| \int_{-L}^L p(x) d\nu_m(x) - \int_{-L}^L p(x) d\nu(x) \right| + \left| \int_{-L}^L (p(x) - f(x)) d\nu_m(x) \right| \end{aligned}$$

Dasselbe für den letzten Term, welcher $\rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$, also:

$$\left| \int_{-L}^L p(x) d\nu_m(x) - \int_{-L}^L p(x) d\nu(x) \right| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Und somit erhalten wir:

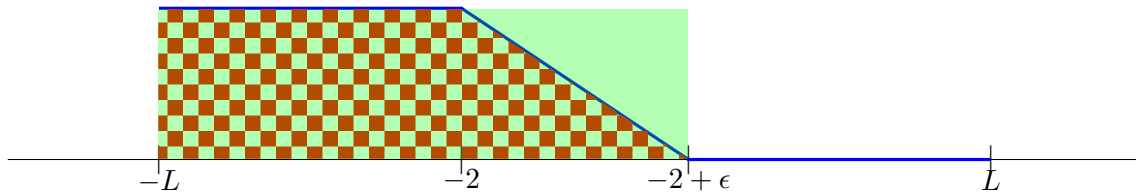
$$\left| \int_{-L}^L f(x) d\nu_m(x) - \int_{-L}^L f(x) d\nu(x) \right| \leq \epsilon$$

□

Als letztes werden wir ein Korollar beweisen welches eine Eigenschaft der Eigenwerte eines Graphen beschreibt.

Korollar 4.0.4. Sei $(X_m)_{m \geq 1}$ eine Familie von zusammenhängenden, k -regulären, endlichen Graphen, für welche $g(X_m) \rightarrow \infty$, wenn $m \rightarrow \infty$. Also haben wir, dass für jedes $\epsilon > 0$ eine Konstante $C \geq 0$ existiert, so dass die Anzahl der Eigenwerte von X_m im Intervall $[-L, (-2 + \epsilon)]$ mindestens $C|X_m|$ ist.

Beweis. Sei f die Funktion welche 1 auf $[L, -2]$, und 0 auf $[-2 + \epsilon, L]$ annimmt. Die Funktion f interpoliert linear zwischen 0 und 1 auf $[-2, -2 + \epsilon]$.



Somit ist für jedes $m \geq 1$:

$$\underline{\nu_m[-L, -2 + \epsilon]} \geq \int_{-L}^{-2 + \epsilon} f(x) d\nu_m(x)$$

Für $m \rightarrow \infty$ und dank dem Theorem 4.0.3, bekommen wir:

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \nu_m[-L, -2 + \epsilon] \geq \int_{-2}^{-2 + \epsilon} f(x) d\nu(x)$$

Also erhalten wir, mit demselben Argument als beim Beweis des Theorems 4.0.2, dass:

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{|X_m|} \cdot \{\text{Anzahl Eigenwerte in } [-L, (-2 + \epsilon)]\} \geq \int_{-2}^{-2 + \epsilon} f(x) d\nu(x) \geq \int_{-2}^{-2 + \epsilon} f(x) d\nu(x) = C$$

□

In diesem Beweis benutzen wir wieder die Folge von Massen

$$\nu_m = \frac{1}{|X_m|} \sum_{j=0}^{|X_m|-1} \frac{\delta_{\mu_j(X_m)}}{\sqrt{k-1}}.$$

Dieses Korollar gibt uns eine wichtige Aussage über das Verhalten der Eigenwerte im Intervall $[-L, (-2 + \epsilon)]$. Somit gibt es uns eine weitere Möglichkeit einen Graphen besser zu beschreiben, ins bezügliche der Eigenwerte dieses Graphen.

Übungen zu Kapitel 1.4

- 1.) Die Beweise findet man auf Seite 5 und 6.
- 2.) Die Berechnung der Rekursionsformel und der erzeugenden Funktion findet man auf den Seiten 7 bis 9.

Kapitel 5

Fazit

Am Anfang unseres Kapitels haben wir zwei Theoreme gesehen, welche es erlauben die Eigenwerte einzuschränken. Daraus konnten wir die Definition eines Ramanujan Graphen angeben. Leider ist es sehr schwierig Beispiele zu finden, was wir selber auch gemerkt haben. Als wir ein einfaches Beispiel betrachtet haben mit 2-regulären Graphen haben wir zuerst gedacht einen Widerspruch gefunden zu haben. Bei einem nächsten Betrachten haben wir dann gemerkt, dass das Beispiel doch aufgeht und wir uns in der Definition geirrt hatten. Für viele Theoreme und Definitionen konnten wir auch keine Beispiele finden, da es sehr schwierig ist und das Ziel des Buches ist es diese zu finden.

In einem zweiten Teil haben wir die Theoreme vom Beginn noch verbessert. Somit können wir die Mindestanzahl der Eigenwerte in einem bestimmten Intervall bestimmen. Die Beweise zu diesen Theoremen waren nicht einfach nachzuvollziehen. Nach grossem Zeitaufwand haben wir es geschafft, und konnten einander die verschiedenen Schritte erklären.