
ESTIMATEURS SPECTRAUX

Dernière mise à jour : 16 janvier 2017

Julien Rosset

Chapitre 1

Estimateurs Spectraux

Le but de ce chapitre est de démontrer, que, pour un p fixé, la famille de graphes $X^{p,q}$ est une famille de graphes expanseurs quand q tend vers l'infini. Voici ce que nous verrons dans ce chapitre sur les estimateurs spectraux :

Premièrement, l'on va lier les chemins dans les graphes et les quaternions afin d'obtenir un lien intéressant entre la somme du nombre de chemins de longueur $m - 2r$ d'un graphe $X^{p,q}$ et le nombre de solutions entières à l'équation

$$x_0^2 + q^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = p^m$$

sous certaines conditions. Ensuite, nous ferons un changement de variable bien précis pour utiliser la définition des polynômes de Chebyshev du second degré. A l'aide des résultats du chapitre sur les représentations de $PSL_2(q)$, nous pourrons alors majorer la multiplicité des valeurs propres non triviales de la matrice adjacente à $X^{p,q}$ et ainsi, avoir suffisamment d'informations pour démontrer, au travers d'un théorème que la famille des graphes $X^{p,q}$ est une famille de graphes expanseurs. Nous terminerons alors le chapitre avec deux corollaires donnant des informations sur la maille, le nombre chromatique et la constante isopérimétrique des graphes $X^{p,q}$.

Tout d'abord, commençons par rappeler quelques notions importantes.

1 Définitions importantes

1.1 Graphes expanseurs

Soit $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une famille de graphes finis, k -régulier et connectés sans boucles tels que $|V_m| \rightarrow +\infty$ lorsque $m \rightarrow \infty$ où V_m est l'ensemble des sommets de $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$. La famille $(X_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une **famille de graphes expanseurs** si et seulement s'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$k - \mu_1(X_m) \geq \epsilon$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 1.$$

1.2 Rappel sur $X^{p,q}$

Tout d'abord, p et q sont deux nombres premiers et on peut supposer que p, q sont impairs, puisqu'en général, $p, q > 2$. $X^{p,q}$ est un graphe $(p + 1)$ -régulier connexe/connecté ayant un

nombre de sommets en fonction de q . C'est-à-dire, si q devient très grand, alors le nombre de sommets de $X^{p,q}$ devient lui aussi très grand. Rappelons que par le Théorème 4.3.5 du livre [1], $X^{p,q} \simeq Y^{p,q}$ où

$$Y^{p,q} = \mathcal{G}(\Lambda/\Lambda(q), T_{p,q})$$

est le graphe de Cayley du groupe quotient $\Lambda/\Lambda(q)$ avec le système de générateurs $T_{p,q}$. En plus, le graphe de Cayley de Λ est un arbre infini p -régulier et $\Lambda(q)$ est un sous-groupe normal de Λ . Donc on peut voir $Y^{p,q}$ comme un quotient de l'arbre $(p+1)$ -régulier par le sous-groupe $\Lambda(q)$. Puisque $Y^{p,q}$ est le quotient d'un arbre infini, $T_{p,q} \subset \Lambda/\Lambda(q)$ est un système de générateur, c'est à dire, tout élément $x \in Y^{p,q}$ peut être écrit à l'aide des éléments $t_i \in T_{p,q}$. Ainsi, si l'on a $x_i \in Y^{p,q}$ un sommet d'un circuit de longueur l sans retour en arrière avec $x_0 = 1, x_2, \dots, x_{l-1}, x_l = 1$, il existe $t_1, \dots, t_i \in T_{p,q}$ tels que :

$$x_i = t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_i$$

pour $1 \leq i \leq l$ Une autre propriété importante de $X^{p,q}$ est qu'il est $\Lambda/\Lambda(q)$ -**transitif par sommet** ($\Lambda/\Lambda(q)$ -vertex transitiv).

1.3 G-transitif par sommet (G-vertex transitiv)

Un graphe X est **G -transitif par sommet** si, pour n'importe quel v_1, v_2 des sommets de X , il y a un automorphisme f de X dans $G < \text{Aut}(X)$:

$$f : V(X) \rightarrow V(X)$$

tel que

$$f(v_1) = v_2.$$

1.4 Rappels sur $\Lambda, \Lambda(q), \Lambda', (\Pi_q \circ Q), S_p$

Le groupe Λ'

Λ' est un groupe, défini par :

$$\Lambda' := \{\alpha \in \mathbb{H} : \alpha \equiv 1 \pmod{2} \text{ ou } \alpha \equiv i + j + k \pmod{2}, N(\alpha) = p^m, m \in \mathbb{N}\}.$$

Le groupe Λ

$\Lambda = \Lambda' / \sim$ avec la classe d'équivalence suivante : $\alpha \sim \beta$ ssi $\exists m, n \in \mathbb{N}$ tels que

$$p^m \alpha = p^n \beta$$

où $\alpha, \beta \in \Lambda'$.

L'ensemble S_p

L'ensemble S_p est défini comme suit : $S_p = \{\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_s, \bar{\alpha}_s, \beta_1, \dots, \beta_t\} \subset \Lambda'$ (Voir l'exposé de Clélia ou regarder dans [1]).

Définition de $\Lambda(q)$ par le Lemme 4.3.2

Le résultat du Lemme 4.3.2 de [1] nous donne que

$$\Lambda(q) = \{[\alpha] \in \Lambda : \alpha = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k, q \mid a_1, a_2, a_3\}.$$

On peut voir $\Lambda(q)$ comme étant le noyau de Λ et ainsi, $\Lambda(q)$ est un sous-groupe normal de Λ .

L'application Π_q

L'application Π_q est un morphisme de groupes, $\Pi_q : \Lambda \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{F}^*)/\mathbb{Z}_q$ tel que $\Lambda(q)$ est le noyau de Π_q .

$$\Pi_q(g \cdot k) = \Pi_q(g) \cdot \Pi_q(k) = \Pi_q(g)$$

implique que $\text{Im}(\Pi_q) \cong \Lambda/\Lambda(q)$.

L'application $\Pi_q \circ Q$

Nous avons encore l'application $\Pi_q \circ Q$ (voir dans [1] la définition de l'application Q) où

$$T_{p,q} = (\Pi_q \circ Q)(S_p)$$

et puisque $|T_{p,q}| = p + 1 = |S_p|$ on a une bijection entre S_p et $T_{p,q}$ car ils sont finis. Ainsi, il existe un unique $\alpha_i \in \Lambda'$ tel que

$$t_i = (\Pi_q \circ Q)(\alpha_i)$$

pour un $t_i \in T_{p,q}$.

2 Lien entre les chemins et les quaternions

Nous allons, dans cette partie faire le lien entre le nombre de circuits dans un graphe $X^{p,q}$ et le nombre de solutions entières de l'équation

$$x_0^2 + q^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = p^m$$

sous certaines conditions. Pour ce faire, commençons tout d'abord par rappeler le nombre de sommets et le spectre de la matrice adjacente de $X^{p,q}$.

Dénotons par n le nombre de sommets de $X^{p,q}$ et par

$$\mu_0 = p + 1 > \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$$

les valeurs propres (le spectre) de sa matrice adjacente. Rappelons de la section 1.4 du livre [1] que f_m est **le nombre de chemins de longueur m sans retour en arrière, commençant et finissant en $1 \in X^{p,q}$** . Par la Proposition 4.1.2(a) de [1], le graphe $X^{p,q}$ est **transitif par sommet** donc la formule de la trace du Corollaire 1.4.7 de [1] de la matrice adjacente de $X^{p,q}$ prend la forme suivante :

$$\sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} f_{m-2r} = \frac{p^{\frac{m}{2}}}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_m\left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{p}}\right)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. Notre première tâche sera de réinterpréter le terme de gauche de cette formule. Pour ce faire, nous allons trouver un lien entre la somme de f_{m-2r} et le nombre de solution entière d'une équation faisant intervenir la forme quadratique à 4 variables suivante :

$$Q(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + q^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

et, pour $m \geq 1$, on note par

$$S_Q(p^m) = |\{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^4 : Q(x_0, x_1, x_2, x_3) = p^m, \text{ soit } x_0 \text{ impair et } x_1, x_2, x_3 \text{ pair ou } x_0 \text{ pair et } x_1, x_2, x_3 \text{ impair}\}|.$$

Donc $S_Q(p^m)$ est le nombre de solutions entières ($\in \mathbb{Z}$) de l'équation $Q(x_0, x_1, x_2, x_3) = p^m$ avec les bonnes conditions sur $x_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2, 3$. On démontrera dans le Lemme 2.2 que ce nombre de solutions entières est égal à $2 \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} f_{m-2r}$.

2.1 Remarque

Supposons que m soit pair ou que $p \equiv 1 \pmod{4}$. En utilisant ces restrictions, nous pouvons facilement remarquer que cela force x_0 à être impair et x_1, x_2, x_3 à être pair. Ainsi, dans ce cas-là, on introduit la forme quadratique

$$Q'(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + 4q^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Ainsi, $S_Q(p^m)$ est exactement le nombre de solutions dans \mathbb{Z} de $Q'(x_0, x_1, x_2, x_3) = p^m$.

2.2 Lemme

Pour $m \in \mathbb{N}$:

$$S_Q(p^m) = 2 \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} f_{m-2r}.$$

Preuve

" $f_l \in \Lambda(q)$ " :

Tout d'abord, grâce au théorème 4.3.5 [1], on identifie $X^{p,q}$ avec $Y^{p,q} = \mathcal{G}(\Lambda/\Lambda(q), T_{p,q})$. Soient

$$x_0 = 1, x_1, x_2, \dots, x_{l-1}, x_l = 1$$

les sommets d'un chemin $\in Y^{p,q}$, de longueur l , sans retour en arrière, commençant et finissant à $1 \in Y^{p,q}$. Comme dans la preuve de la proposition 4.3.3, on peut trouver $t_1, \dots, t_l \in T_{p,q}$ tels que, pour $1 \leq i \leq l$:

$$x_i = t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_i$$

Ecrivons $t_i = (\Pi_q \circ Q)(\alpha_i)$ pour un unique $\alpha_i \in S_p \subset \Lambda'$ (car $|S_p| = p + 1 = |T_{p,q}|$). On a que $[\alpha_i] \in \Lambda$ et

$$[\alpha_1][\alpha_2]\dots[\alpha_l]$$

est un plus court chemin de longueur l dans Λ (ou en le voyant dans l'arbre $\mathcal{G}(\Lambda, Q(S_p))$). Puisqu'il est obtenu d'un chemin sans retour en arrière on a que

$$(\prod_q([\alpha_1][\alpha_2]\dots[\alpha_l]) = x_l = 1.$$

Donc $[\alpha_1][\alpha_2]\dots[\alpha_l] \in \Lambda(q)$. Ceci montre que f_l est bien le nombre de plus court chemins de longueur l dans Λ appartenant à $\Lambda(q)$.

$$"S_Q(p^m) = |\{\alpha \in \Lambda' : N(\alpha) = p^m, [\alpha] \in \Lambda(q)\}|" :$$

Soient $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^4$ comme dans la définition de $S_Q(p^m)$, donc $Q(x_0, x_1, x_2, x_3) = p^m$ et les congruences modulo 2 sont satisfaites. C'est-à-dire, à partir du quaternion

$$\alpha = x_0 + q(x_1i + x_2j + x_3k)$$

si x_0 est impair et x_1, x_2, x_3 sont pair, alors $\alpha \equiv 1 \pmod{2}$ et si x_0 est pair et x_1, x_2, x_3 sont impair alors $\alpha \equiv i + j + k \pmod{2}$. Ainsi, ce α appartient à Λ' (rappel : $\Lambda' := \{\alpha \in \mathbb{H} : \alpha \equiv 1 \pmod{2} \text{ ou } \alpha \equiv i + j + k \pmod{2}, N(\alpha) = p^m, m \in \mathbb{N}\}$), et, puisque q divise $a_1 = qx_1, a_2 = qx_2, a_3 = qx_3$, ses classes d'équivalences sont dans $\Lambda(q)$ (rappel : $\Lambda(q) = \{[\alpha] \in \Lambda : \alpha = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k, q \mid a_1, a_2, a_3\}$). De cela, on obtient l'égalité suivante :

$$S_Q(p^m) = |\{\alpha = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \Lambda' : N(\alpha) = p^m, q \mid a_1, a_2, a_3\}|.$$

L'égalité ci-dessus est équivalente à

$$S_Q(p^m) = |\{\alpha \in \Lambda' : N(\alpha) = p^m, [\alpha] \in \Lambda(q)\}|.$$

$$"S_Q(p^m) = 2 \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} f_{m-2r}" :$$

Supposons que $\alpha \in \{\alpha' = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in \Lambda' : N(\alpha') = p^m, q \mid a_1, a_2, a_3\}$. Par le corollaire 2.5.14 de [1], α possède une factorisation unique,

$$\alpha = \pm p^l \omega_{m-2l}$$

où ω_{m-2l} est un plus court chemin de longueur $m-2l$ et $\omega_{m-2l} \in \Lambda'$. La classe $[\alpha]$ est alors aussi un plus court chemin de longueur $m-2l$ dans Λ qui, de plus, est aussi dans $\Lambda(q)$. (car il existe p^l et p^0 dans \mathbb{N} tels que $p^0 \tilde{\alpha} = p^l \beta$ où $\tilde{\alpha} = +p^l \omega_{m-2l}$ et $\beta = \omega_{m-2l} \Rightarrow \tilde{\alpha} \sim \beta$ et de même pour $-\tilde{\alpha}$ et $-\beta$, puisque $\tilde{\alpha} \approx -\tilde{\alpha}$, on doit différencier les $\tilde{\alpha}$ positifs et négatifs, ce qui nous donne bien le facteur 2 devant la somme.)

Inversément, puisque l'on a toujours utilisé des "bijections", ou plutôt des équivalences, on peut partir d'un plus court chemin ω de longueur $m-2l$ dans $\Lambda(q)$, et, par le Corollaire 2.5.14 de [1], on a que

$$\alpha = \pm p^l \omega_{m-2l}$$

produit deux quaternions comme au-dessus. Ainsi, nous avons démontré que :

$$S_Q(p^m) = 2 \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} f_{m-2r}.$$

■

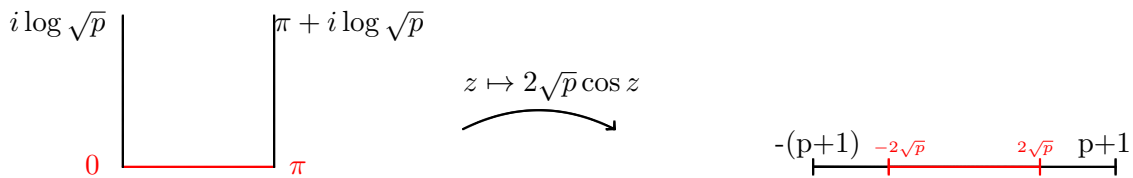
Avec le résultat du Lemme 2.2 et le fait que $\sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} f_{m-2r} = \frac{p^{\frac{m}{2}}}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_m(\frac{\mu_j}{2\sqrt{p}})$ nous obtenons une nouvelle forme pour la formule de la trace de la matrice adjacente de $X^{p,q}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$S_Q(p^m) = \frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} U_m(\frac{\mu_j}{2\sqrt{p}}).$$

2.3 Changement de variable $z \mapsto 2\sqrt{p} \cos(z)$

Introduisons le sous-ensemble de \mathbb{C} suivant :

$$\Theta_p = [i \log \sqrt{p}, 0] \cup [0, \pi] \cup [\pi, \pi + i \log \sqrt{p}].$$



Rappelons rapidement les définitions du sinus et du cosinus complexe, pour $z \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Dans la section exercices, nous allons démontrer que le changement de variables $z \mapsto 2\sqrt{p} \cos(z)$ envoie bijectivement Θ_p vers $[-(p+1), p+1]$. Notons encore que ce changement de variable envoie $[0, \pi]$ vers $[-2\sqrt{p}, 2\sqrt{p}]$, qui est l'intervalle de Ramanujan. Pour $j = 0, 1, \dots, n-1$ soit $\theta_j \in \Theta_p$ l'unique élément de Θ_p tel que $\mu_j = 2\sqrt{p} \cos(\theta_j)$. Ainsi, grâce à la définition des polynômes de Cebisev U_m , (rappel : $U_m(\cos(\theta)) = \frac{\sin((m+1)\theta)}{\sin(\theta)}$), on a :

$$S_Q(p^m) = \frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\sin((m+1)\theta_j)}{\sin(\theta_j)}.$$

2.4 Proposition

Soit μ une valeur propre non triviale de la matrice adjacente de $X^{p,q}$, $|\mu| \neq p+1$, et dénotons par $M(\mu)$ sa multiplicité. Alors,

$$M(\mu) \geq \frac{q-1}{2}.$$

Cette proposition provient des résultats du chapitre sur les représentations de $PSL_2(q)$, ce résultat sera ici donné sans preuve.

3 Théorème

Pour un $\epsilon \in \mathbb{R}$ fixé, $0 < \epsilon < \frac{1}{6}$ et pour un q suffisamment grand, $q \rightarrow \infty$, toute valeur propre non triviale μ de la matrice adjacente de $X^{p,q}$ satisfait :

$$|\mu| \leq p^{\frac{5}{6}+\epsilon} + p^{\frac{1}{6}-\epsilon}.$$

En particulier, la famille de graphes $X^{p,q}$ est une famille de graphes expandeurs. Idée de la preuve : afin de prouver ce résultat, nous trouverons d'abord un minorant et un majorant pour $S_Q(p^m)$ et ensuite, nous isolerons ψ_k (qui sera défini plus loin dans la preuve) et utiliserons la proposition stipulant que $M(\mu_k) \geq \frac{q-1}{2}$ pour μ_k une valeur propre non triviale qui conclurera la preuve.

Démonstration. On commence avec l'expression de la formule de la trace de la matrice adjacente de $X^{p,q}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$S_Q(p^m) = \frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\sin((m+1)\theta_j)}{\sin(\theta_j)}.$$

Ici, $\mu_j = 2\sqrt{p} \cos(\theta_j)$. Si toutes les valeurs propres μ_j sont dans l'intervalle de Ramanujan, ($\mu_j \in [-2\sqrt{p}, 2\sqrt{p}]$) pour tout j , alors on a un graphe de Ramanujan, et donc, en particulier un graphe expandeur. Intéressons-nous donc aux valeurs propres $\mu_j \notin [-2\sqrt{p}, 2\sqrt{p}]$. Si μ_j n'est pas dans l'intervalle de Ramanujan, on écrit :

$$\theta_j = \begin{cases} i\psi_j & \text{if } 2\sqrt{p} < \mu_j \leq p+1. \\ \pi + i\psi_j & \text{if } -(p+1) \leq \mu_j < -2\sqrt{p} \end{cases}$$

où $0 < \psi_j \leq \log \sqrt{p}$ dans les deux cas.

Désormais, supposons que m est pair. Rappelons que le cosinus et le sinus hyperbolique d'un nombre complexe z sont définis par :

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \sin(-iz) \quad \text{et} \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos(-iz).$$

Pour $\mu_j \notin [-2\sqrt{p}, \sqrt{p}]$, nous avons dans les deux cas, puisque m est pair :

$$\frac{\sin((m+1)\theta_j)}{\sin(\theta_j)} = \frac{\sin(i(m+1)\psi_j)}{\sin(i\psi_j)} = \frac{\sinh((m+1)\psi_j)}{\sinh(\psi_j)} \geq 0.$$

Donc, pour une valeur propre non triviale $\mu_k \notin [-2\sqrt{p}, 2\sqrt{p}]$:

$$\begin{aligned} S_Q(p^m) &= \frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} M(\mu_k) \frac{\sinh((m+1)\psi_k)}{\sinh(\psi_k)} + \frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} \sum_{j:\mu_j \neq \mu_k} \frac{\sin((m+1)\theta_j)}{\sin(\theta_j)} \\ &\geq \frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} M(\mu_k) \frac{\sinh((m+1)\psi_k)}{\sinh(\psi_k)} + \frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} \sum_{j:|\mu_j| \leq 2\sqrt{p}} \frac{\sin((m+1)\theta_j)}{\sin(\theta_j)} \end{aligned}$$

Dans la partie "exercices", on va démontrer que pour $\theta \in \mathbb{R}$, $|\frac{\sin((m+1)\theta)}{\sin \theta}| \leq m+1$ et ainsi

$$S_Q(p^m) \geq \frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} M(\mu_k) \frac{\sinh((m+1)\psi_k)}{\sinh(\psi_k)} - 2p^{\frac{m}{2}} (m+1).$$

Nous avons ainsi trouvé un minorant pour $S_Q(p^m)$. Maintenant, cherchons un majorant. Par la Remarque 2.1, puisque m est pair, $S_Q(p^m)$ est le nombre de solutions entières de l'équation :

$$x_0^2 + q^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = p^m.$$

On estime tout d'abord le nombre possible de choix pour x_0 . Premièrement, nous avons $|x_0| \leq p^{\frac{m}{2}}$ et deuxièmement, $x_0^2 \equiv p^m \pmod{q^2}$. De ce fait, avec le résultat d'un exercice, on a :

$$x_0 \equiv \pm p^{\frac{m}{2}} \pmod{q^2}$$

et puisque x_0 et p sont impair, on a plus précisément :

$$x_0 \equiv \pm p^{\frac{m}{2}} \pmod{2}q^2.$$

Ceci donne au plus $2(\frac{p^{\frac{m}{2}}}{q^2} + 1)$ choix pour x_0 . Une fois x_0 fixé, on doit résoudre l'équation pour $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ c'est à dire :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{p^m - x_0^2}{4q^2}.$$

On sait, qu'il y a $r_3(\frac{p^m - x_0^2}{4q^2})$ manière de le faire, ainsi, avec le résultat du corollaire 2.1.13 de [1], nous avons :

$$r_3(\frac{p^m - x_0^2}{4q^2}) = O_\epsilon((\frac{p^m}{q^2})^{\frac{1}{2} + \epsilon}).$$

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$ nous avons, en multipliant le nombre de choix pour x_0 et ceux pour x_1, x_2, x_3 :

$$S_Q(p^m) = O_\epsilon[\frac{p^{m/2+\epsilon m}}{q^{1+2\epsilon}}(\frac{p^{\frac{m}{2}}}{q^2} + 1)] = O_\epsilon[\frac{p^{m(1+\epsilon)}}{q^3} + \frac{p^{\frac{m}{2}(1+2\epsilon)}}{q}].$$

Donc, pour une certaine constante C_ϵ , notre inégalité devient :

$$C_\epsilon[\frac{p^{m(1+\epsilon)}}{q^3} + \frac{p^{\frac{m}{2}(1+2\epsilon)}}{q}] \geq S_Q(p^m) \geq \frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} M(\mu_k) \frac{\sinh((m+1)\psi_k)}{\sinh(\psi_k)} - 2p^{\frac{m}{2}}(m+1)$$

En isolant $M(\mu_k)$ en utilisant le fait que $n \leq q^3$ et ensuite en supposant que m est choisi de manière à ce que $p^{\frac{m}{2}} \leq q^3$, avec $\sinh \leq \sinh \log \sqrt{p}$ on obtient :

$$M(\mu_k) \sinh((m+1)\psi_k) = O_\epsilon[q^{3+6\epsilon}].$$

En prenant m le plus grand entier pair tel que $p^{\frac{m}{2}} \leq q^3$ et pour q suffisamment grand, on a :

$$\sinh((m+1)\psi_k) \geq \frac{e^{(m+1)\psi_k}}{3} \geq \frac{e^{(-1+6\log_p q)\psi_k}}{3} \geq \frac{p^{-\frac{1}{2}}}{3} e^{6\log_p q \cdot \psi_k}$$

où, dans la dernière inégalité, on utilise le fait que $\psi_k \leq \log_p \sqrt{p}$. Donc, ceci nous amène à l'égalité suivante :

$$M(\mu_k) = O_\epsilon(q^{3+6\epsilon - \frac{6\psi_k}{\log_p}}).$$

Puisque μ_k est une valeur propre non triviale, on a, par la Proposition 2.4 que :

$$M(\mu_k) \geq \frac{q-1}{2}$$

Donc, puisque $q \rightarrow \infty$ on doit avoir que

$$3 + 6\epsilon - \frac{6\psi_k}{\log_p} \geq 1, \text{ ce qui donne } \psi_k \leq (\frac{1}{3} + \epsilon) \log p.$$

Donc, puisque $\theta_k = i\psi_k$ ou $\theta_k = \pi + i\psi_k$ et que $\mu_k = 2\sqrt{p} \cos \theta_k$, nous obtenons bien :

$$|\mu_k| = 2\sqrt{p} |\cos(i\psi_k)| = 2\sqrt{p} \cosh \psi_k \leq p^{\frac{5}{6}+\epsilon} + p^{\frac{1}{6}-\epsilon}.$$

Ce qui conclut la preuve. ■

3.1 Corollaires

Il y a deux Corollaires importants au Théorème 3. Ils donnent des informations sur la maille, la constante isopérimétrique et le nombre chromatique des graphes $X^{p,q}$.

■ **Corollaire 1.** *Pour un $\epsilon \in (0, \frac{1}{6})$ fixé, pour q suffisamment large, l'on a :*

$$h(X^{p,q}) \geq \frac{p+1-p^{\frac{5}{6}+\epsilon}-p^{\frac{1}{6}-\epsilon}}{2}.$$

De plus, si $\binom{p}{q} = 1$ et q est suffisamment grand :

$$\chi(X^{p,q}) \geq \frac{p+1}{p^{\frac{5}{6}+\epsilon}+p^{\frac{1}{6}-\epsilon}}.$$

Ces résultats proviennent directement du Théorème 1.2.3 et du Corollaire 1.5.4 de [1]. Ce Corollaire (Corollaire 1) nous donne une construction explicite d'une famille infinie de graphes avec une grande maille et un grand nombre chromatique, ce qui donne une solution constructive au problème de la section 1.6 de [1], où nous avons utilisé des arguments probabilistes pour établir l'existence de tels graphes.

■ **Corollaire 2.** *Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. Il existe alors un nombre premier impair p tel que, pour un nombre premier q suffisamment grand :*

$$g(X^{p,q}) \geq N \quad \text{et} \quad \chi(X^{p,q}) \geq N.$$

Démonstration. Soit p choisi suffisamment grand pour que la condition $\frac{p+1}{p^{\frac{11}{12}}+p^{\frac{1}{12}}} \geq N$ soit remplie. Ensuite, choisissons un q suffisamment grand pour que les quatre conditions suivantes soient remplies en même temps :

1. $q > p^8$;
2. $2 \log_p q \geq N$;
3. $\binom{p}{q} = 1$;
4. $\chi(X^{p,q}) \geq \frac{p+1}{p^{\frac{11}{12}}+p^{\frac{1}{12}}}$

Ainsi, les conditions 1-3 nous permettent d'utiliser la Proposition 4.3.3 de [1] qui dit que $g(Y^{p,q}) \geq 2 \log_p(q)$ et par le Corollaire 1 et la condition $\frac{p+1}{p^{\frac{11}{12}}+p^{\frac{1}{12}}} \geq N$ nous avons bien $\chi(X^{p,q}) \geq \frac{p+1}{p^{\frac{11}{12}}+p^{\frac{1}{12}}} \geq N$ ce qui conclut :

$$\min\{g(X^{p,q}), \chi(X^{p,q})\} \geq N.$$
■

4 Exercices

Ici nous présenterons les solutions de deux résultats utilisés dans ce chapitre sur les estimateurs spectraux.

1. Montrer que $z \mapsto 2\sqrt{p} \cos(z)$ envoie bijectivement Θ_p vers $[-(p+1), p+1]$.
2. Démontrer que, pour $\theta \in \mathbb{R} : \left| \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta} \right| \geq m+1$.

Solution exercice 1

Démonstration. Tout d'abord, montrons la surjectivité ; puisque la fonction \cos est holomorphe, est elle aussi continue. Rappelons que $z \in \Theta_p = [i \log \sqrt{p}, 0] \cup [0, \pi] \cup [\pi, \pi + i \log \sqrt{p}]$. Pour $z = i \log \sqrt{p} \in \Theta_p$ on a $2\sqrt{p} \cos(i \log \sqrt{p}) = p+1$ et pour $z = \pi i \log \sqrt{p} \in \Theta_p$, on a $2\sqrt{p} \cos(\pi + i \log \sqrt{p}) = -(p+1)$. Comme \cos est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires on a que $z \mapsto 2\sqrt{p} \cos(z)$ prend toutes les valeurs entre $-(p+1)$ et $p+1$ pour $z \in \Theta_p$. Donc pour tout élément $\tilde{x} \in [-(p+1), p+1]$ il existe un élément $\tilde{z} \in \Theta_p$ tel que $2\sqrt{p} \cos(\tilde{z}) = \tilde{x}$. Donc l'application $z \mapsto 2\sqrt{p} \cos(z)$ est **surjective**.

Pour l'injectivité, on veut que pour $z_1, z_2 \in \Theta_p$, $\cos(z_1) = \cos(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$. Puisque $\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ on a, avec $z = a + bi$, $iz = ai - b$ et $-iz = -ai + b$,

$$\cos(z_1) = \cos(z_2) \Leftrightarrow e^{iz_1} + e^{-iz_1} = e^{iz_2} + e^{-iz_2} \Leftrightarrow e^{ia_1 - b_1} + e^{-ia_1 + b_1} = e^{ia_2 - b_2} + e^{-ia_2 + b_2}.$$

Donc, en utilisant la formule de Gauss pour les nombres complexes, c'est-à-dire $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ on obtient, avec l'identité $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$:

$$\begin{aligned} e^{b_1}(\cos(a_1) + i \sin(a_1)) + e^{b_1}(\cos(-a_1) + i \sin(-a_1)) = \\ e^{b_2}(\cos(a_2) + i \sin(a_2)) + e^{b_2}(\cos(-a_2) + i \sin(-a_2)) \end{aligned}$$

On distingue alors trois cas :

1. $z \in [0, i \log \sqrt{p}]$
2. $z \in [\pi, \pi + i \log \sqrt{p}]$
3. $z \in [0, \pi]$

Pour $z \in [0, i \log \sqrt{p}] \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$ et $b_1, b_2 \in [0, \log \sqrt{p}]$

$$\cos(z_1) = \cos(z_2) \Leftrightarrow e^{-b_1} + e^{b_1} = e^{-b_2} + e^{b_2}.$$

En notant $x = e^{b_1}$ et $y = e^{b_2}$ on obtient le système :

$$\frac{1}{x} + x = \frac{1}{y} + y \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = \frac{y^2+1}{y} \Leftrightarrow x - y = xy(x - y).$$

Puisque $b_1 \neq b_2 \Rightarrow e^{b_1} \neq e^{b_2}$ et comme $b_1, b_2 \in [0, \log \sqrt{p}]$ on a $e^{b_1}, e^{-b_1}, e^{b_2}, e^{-b_2} \neq 0$ ce qui nous donne $x - y \neq 0$ et donc

$$x - y = xy(x - y) \Leftrightarrow xy = 1.$$

Ainsi, si $x = y$ ($x = e^{b_1}$, $y = e^{b_2}$) $\Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow e^{b_1 - b_2} = 1 \Rightarrow b_1 = b_2 \Rightarrow z_1 = z_2$, cela implique donc que sur $[0, \log \sqrt{p}]$ $z \mapsto \cos(z)$ est injective. Pour $z \in [\pi, \pi + \log \sqrt{p}]$, le raisonnement est similaire.

Pour $z \in [0, \pi]$, on a $b_1 = b_2 = 0$ et $a_1, a_2 \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} \cos(z_1) = \cos(z_2) &\Leftrightarrow \\ \cos(a_1) + i \sin(a_1) + \cos(-a_1) + i \sin(-a_1) &= \cos(a_2) + i \sin(a_2) + \cos(-a_2) + i \sin(-a_2) \\ \text{puisque } -\sin(\alpha) &= \sin(-\alpha) \\ \Leftrightarrow \cos(a_1) + \cos(-a_1) &= \cos(a_2) + \cos(-a_2) \\ \text{car } \cos(\alpha) &= \cos(-\alpha) \\ \Leftrightarrow 2 \cos(a_1) &= 2 \cos(a_2). \end{aligned}$$

Ainsi, comme $a_1, a_2 \in [0, \pi]$ on peut utiliser la fonction réciproque "arccos" et on obtient $a_1 = a_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2$

Ce qui démontre l'injectivité de $z \mapsto 2\sqrt{p}\cos(z)$ sur Θ_p . Puisque $z \mapsto 2\sqrt{p}\cos(z)$ est surjective (voir plus haut), $z \mapsto 2\sqrt{p}\cos(z)$ est bijective, donc envoie Θ_p bijectivement vers $[-(p+1), p+1]$. ■

Solution exercice 2

On va démontrer le résultat par induction, et l'on suppose $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Pour $m = 1$ on a $|\frac{\sin(m)\theta}{\sin\theta}| = |\frac{\sin\theta}{\sin\theta}| = 1 \leq m = 1$.

$m \rightarrow m + 1$: Supposons que pour m le résultat soit vrai ($|\frac{\sin(m)\theta}{\sin\theta}| \leq m$), et montrons qu'il est vrai pour $m + 1$:

$$\begin{aligned} |\sin((m+1)\theta)| &= |\sin(m\theta + \theta)| \\ &= |\sin(m\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(m\theta)| \\ &\leq |\sin(m\theta) \cdot \cos(\theta)| + |\sin(\theta)\cos(m\theta)| \\ &= |\sin(m\theta)| |\cos(\theta)| + |\sin(\theta)| |\cos(m\theta)| \\ \text{On majore les cosinus } (|\cos(\theta)| &\leq 1) \\ &\leq |\sin(m\theta)| + |\sin(\theta)| \\ \text{On applique l'induction} \\ &\leq |m \sin(\theta)| + |\sin(\theta)| \\ &= (m+1) \cdot |\sin(\theta)| \end{aligned}$$

Donc, nous trouvons bien $|\sin((m+1)\theta)| \leq (m+1) \cdot |\sin(\theta)|$, et donc, en divisant par $|\sin(\theta)|$, le résultat. (On prend $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.) ■

Bibliographie

- [1] Giuliana Davidoff, Peter Sarnak, and Alain Valette, *Elementary Number Theory, Group Theory and Ramanujan Graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.